

УЧЕТ СОБСТВЕННОГО ВЕСА ГРУНТА ПРИ РЕШЕНИИ
ЗАДАЧИ БУССИНЕСКА

THESELF-WEIGHT OF SOIL IN SOLVING THE PROBLEM OF BOUSSINESQ

Бул макалада топурактын массивиндеги чыңалууну аныктоодо Буссинескдин маселеси менен анын өздүк салмагын эске алуу каралган.

Ачкыч сөздөр: чыңалуу, деформация, топурак, тело, сызыктуу деформация, өздүк салмак, жарым мейкиндик, бурч.

В этой статье предлагается определение напряжений в массиве грунта с учетом собственного веса грунта задачей Буссинеска.

Ключевые слова: напряжение, деформация, грунт, тело, линейная деформация, собственный вес, полупространства, угол.

This article proposes a definition of stress in the array of soil, taking into account its own weight soil Boussinesq task.

Keywords: stress, strain, soil, body, linear deformation, own weight, half space, angle.

При определении напряжений в массиве грунта принимают, что грунт является сплошным линейно-деформируемым телом, испытывающим однородное нагружение. При этих условиях для определения осредненных напряжений в точке массива грунта используют решения теории упругости [1-4].

Решение задачи при действии вертикальной сосредоточенной силы, приложенной к поверхности упругого полупространства, полученное в 1885 г. Ж. Буссинеском, позволяет определить все компоненты напряжений и деформаций в любой точке M полупространства от действия силы N . При этом грунт рассматривается как невесомое линейно-деформируемое тело.

В статье рассматривается, что грунт весомое линейно-деформируемое тело и решение задачи Буссинеска производится одновременным учетом собственного веса грунта. Предлагаются формулы для определения вертикального напряжения σ_z с учетом собственного веса грунта.

Рассмотрим упругое линейно-деформируемое весомое полупространство сосредоточенной силой N на поверхности. Определяем напряжение точки M от действия сосредоточенной силы N . Положение точек определяется радиальными координатами R и β , где R – расстояние от силы до точки M , β – угол между линией R и вертикальной осью Z (рис. 1) [1 – 4].

Радиальное напряжение σ_R действует по направлению R и учитывает влияние собственного веса грунта при действии сосредоточенной силы N . Тогда оно определяется по формуле:

$$\sigma_R = \sigma_R^N + \sigma_R^g, \quad (1)$$

где σ_R^N – радиальное напряжение от действия силы N для невесомого упругого тела [1-4];

σ_R^g – радиальное напряжение от действия собственного веса грунта для весомого упругого тела.

Напряжение σ_R в общем виде определяется по формуле $\sigma_R = \frac{A \cos \beta}{R^2}$ [1-4]. Для определения коэффициента пропорциональности A составляем уравнение равновесия в виде суммы всех сил на ось Z (рис. 1а)

$$N - \int_F \sigma_R dF \cdot \cos \beta - \int_{F'} \sigma_g \cdot dF' = 0 \quad (2)$$

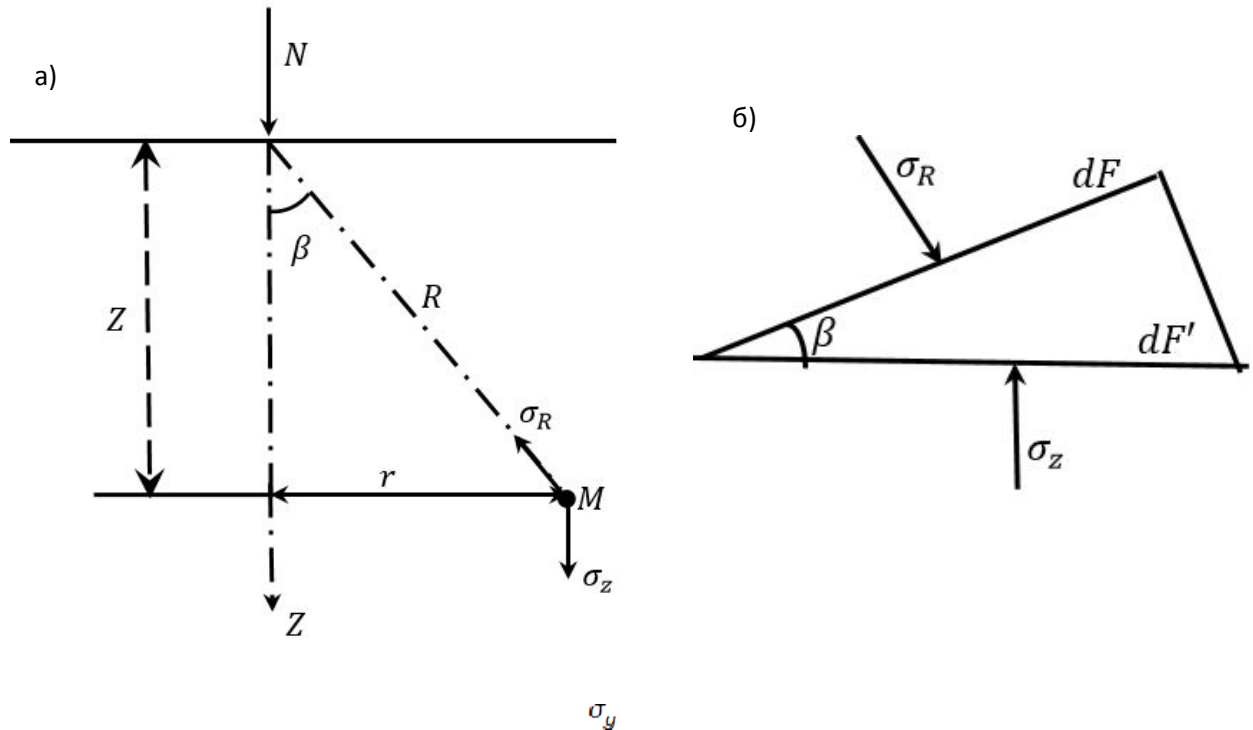


Рис. 1. Схемы определения напряжений σ_R и σ_z :

а) схема определения напряжений σ_R от действия сосредоточенной силы N ;

б) схема определения напряжения σ_z .

где dF – наклонная площадка на которую действует напряжения σ_R ; dF' – горизонтальная площадка на которую действует напряжения σ_g в точке M .

Здесь $dF = 2\pi r \cdot R \cdot d\beta$, $dF' = \frac{dF}{\cos \beta} = \frac{2\pi r \cdot R \cdot d\beta}{\cos \beta}$, $Z = R \cdot \cos \beta$ (рис. 2) [1-2].

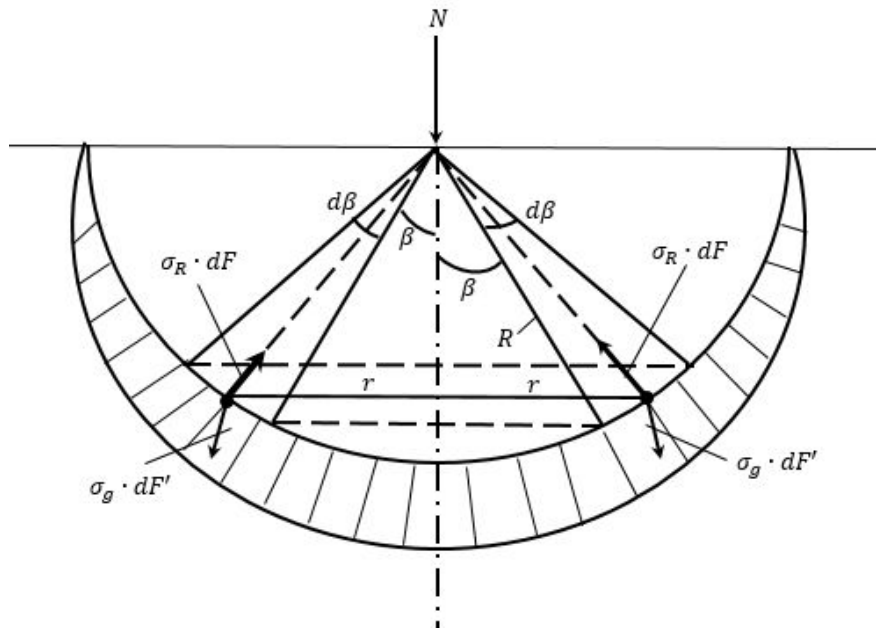


Рис. 2. Схемы действия сил $\sigma_R \cdot dF, \sigma_\theta \cdot dF'$.

Тогда формула (2) примет вид:

$$N - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_R \cdot 2\pi r \cdot R \cdot d\beta \cdot \cos\beta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_\theta \cdot \frac{2\pi \cdot r \cdot R \cdot d\beta}{\cos\beta} = 0$$

учитывая, что $r = R \cdot \sin\beta$ (рис. 1а) имеем

$$N - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_R \cdot 2\pi R \cdot \sin\beta \cdot R \cdot d\beta \cdot \cos\beta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_\theta \cdot \frac{2\pi \cdot R \cdot \sin\beta \cdot R \cdot d\beta}{\cos\beta} = 0$$

$$N - 2\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_R \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta \cdot d\beta + 2\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_\theta \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot d\beta = 0 \quad (3)$$

Подставляя значений $\sigma_R = \frac{A \cos\beta}{R^2}$ и $\sigma_\theta = \gamma \cdot Z$ по [1-4] в формулу (3) имеем,

$$N - 2\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{A \cos^2\beta}{R^2} \cdot \sin\beta \cdot d\beta + 2\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma \cdot Z \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot d\beta = 0$$

где A – коэффициент пропорциональности определяемый из этого уравнения; γ – удельный вес неуплотнённого грунта; $Z = R \cdot \cos\beta$ – вертикальное расстояние до точки М.

$$N + \frac{2\pi R^2}{R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} A \cdot \cos^2\beta d(\cos\beta) + 2\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma \cdot R \cdot \cos\beta \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta} d\beta = 0 \quad (4)$$

Интегрируем уравнение (4) и получим,

$$N + 2\pi \frac{A \cos^3\beta}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi^2 \gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\beta \cdot d\beta = 0$$

$$N - \frac{2\pi A}{3} - 2\pi R^3 \gamma \cdot \cos\beta \cdot \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$N - \frac{2\pi A}{3} + 2\pi R^3 \gamma = 0$, отсюда определяем А

$$\frac{2\pi A}{3} = N + 2\pi R^3 \gamma$$

$$A = \frac{3N}{2\pi} + 3R^3 \gamma \quad (5)$$

Формула (5) определяет коэффициент пропорциональности А при определении радиального напряжения σ_R от действия сосредоточенной силы с учетом собственного веса грунта.

Тогда радиальное напряжение будет

$$\sigma_R = \frac{A \cos \beta}{R^2} = \left(\frac{3N}{2\pi} + 3R^3 \gamma \right) \frac{\cos \beta}{R^2} = \frac{3N}{2\pi} \cdot \frac{\cos \beta}{R^2} + 3R\gamma \cdot \cos \beta,$$

с учетом того, что $R = \frac{z}{\cos \beta}$ имеем,

$$\sigma_R = \frac{3N \cdot \cos \beta}{2\pi R^2} + 3 \frac{z}{\cos \beta} \cdot \gamma \cdot \cos \beta = \frac{3N}{2\pi} \cdot \frac{\cos \beta}{R^2} + 3\gamma z,$$

тогда в удобной форме пишется как

$$\sigma_R = \frac{3N \cdot \cos \beta}{2\pi R^2} + 3\gamma z \quad (6)$$

Сравнивая (6) и (1) имеем, $\sigma_R^N = \frac{3N \cdot \cos \beta}{2\pi R^2}$, $\sigma_R^g = 3\gamma z$

где σ_R^N — радиальное напряжение без учета собственного веса грунта совпадает с формулой в работах [1-2].

По формуле (6) можно определить радиальное напряжение в грунте от действия сосредоточенной силы с учетом собственного веса грунта. На практике при расчете осадок фундаментов нас интересует вертикальное напряжение σ_z .

Определяем напряжение σ_z , для этого в точке М рассмотрим элементарную треугольную призму с площадками dF и dF' (рис. 1б).

Для определения σ_z проецируем всех сил на вертикальную ось Z.

$$\sigma_R \cdot dF \cdot \cos \beta - \sigma_z \cdot dF' = 0$$

$$\sigma_R \cdot dF \cdot \cos \beta - \sigma_z \cdot \frac{dF}{\cos \beta} = 0$$

$$\sigma_R \cdot dF \cdot \cos^2 \beta - \sigma_z \cdot dF = 0 \Rightarrow \sigma_z = \sigma_R \cdot \cos^2 \beta$$

Подставляем формулу (6) и имеем,

$$\sigma_z = \left(\frac{3N \cdot \cos \beta}{2\pi R^2} + 3\gamma \cdot z \right) \cos^2 \beta = \frac{3N \cdot \cos^3 \beta}{2\pi R^2} + 3\gamma \cdot z \cdot \cos^2 \beta$$

$$\sigma_z = \frac{3N \cdot \cos^3 \beta}{2\pi R^2} + 3\gamma \cdot z \cdot \cos^2 \beta \quad (7)$$

По формуле (7) можно определить вертикальное напряжение σ_z от действия сосредоточенной силы N с учетом собственного веса грунта.

Первый член правой части формулы (7) определяет вертикальное напряжение без учета собственного веса грунта, что совпадает с формулой в работах [1-2], а второй член определяет вертикальное напряжение в грунте от собственного веса, при действии сосредоточенной силы. Здесь γ удельный вес неуплотненного грунта на поверхности упругого весомого полупространства.

Формулу (7) можно представить в виде:

$$\sigma_z = \sigma_z^N + \sigma_z^g \quad (8)$$

где $\sigma_z^N = \frac{3N \cdot \cos^3 \beta}{2\pi R^2}$, $\sigma_z^g = 3 \cos^2 \beta \cdot \gamma \cdot z$ (9)

Приведем формулы (9) в удобный вид для практического расчета как в работах [1-2].

Зная, что $\cos\beta = \frac{Z}{R}$, получим

$$\sigma_z^N = \frac{3N \cdot Z^3}{2\pi R^5}; \quad \sigma_z^g = 3\gamma \frac{Z^3}{R^2} \quad (10)$$

Исключим R в формулах (10). Рассмотрим первую формулу

$$\begin{aligned} \sigma_z^N &= \frac{3N \cdot Z^3}{2\pi R^5} = \frac{3N \cdot Z^5}{2\pi Z^2 R^5} = \frac{3N}{2\pi Z^2 \cdot \frac{R^5}{Z^5}} = \frac{3N}{2\pi Z^2 \left(\frac{R}{Z}\right)^5} = \frac{3N}{2\pi Z^2 \left(\frac{\sqrt{Z^2 + r^2}}{Z}\right)^5} = \\ &= \frac{3N}{2\pi Z^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{r}{Z}\right)^2}\right)^5} = \frac{3N}{2\pi Z^2 \left(1 + \left(\frac{r}{Z}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{KN}{Z^2} \\ \sigma_z^N &= \frac{KN}{Z^2} \end{aligned} \quad (11)$$

где $K = \frac{3}{2\pi \left(1 + \left(\frac{r}{Z}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}$ определяется в зависимости от отношений $\frac{r}{Z}$.

В работах [1-2] есть табличные значения K которые применяются при расчете осадок фундаментов.

Теперь преобразуем вторую формулу:

$$\begin{aligned} \sigma_z^g &= 3\gamma \frac{Z^3}{R^2} = 3\gamma \cdot Z \cdot \frac{Z^2}{R^2} = \frac{3\gamma \cdot Z}{\frac{R^2}{Z^2}} = \frac{3\gamma \cdot Z}{\left(\frac{R}{Z}\right)^2} = \frac{3\gamma \cdot Z}{\left(\frac{\sqrt{r^2 + Z^2}}{Z}\right)^2} = \\ &= \frac{3\gamma \cdot Z}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{r}{Z}\right)^2}\right)^2} = \frac{3\gamma \cdot Z}{1 + \left(\frac{r}{Z}\right)^2} = B \cdot \gamma \cdot Z \\ \sigma_z^g &= B \cdot \gamma \cdot Z \end{aligned} \quad (12)$$

где $B = \frac{3}{1 + \left(\frac{r}{Z}\right)^2}$ безразмерный коэффициент показывающий изменение напряжений от собственного веса при действии сосредоточенной силы N .

Увеличение коэффициента B приводит к увеличению плотности грунта. Значит при действии силы N грунт уплотняется по разному в зависимости от положение точки M в полупространстве (рис. 3).

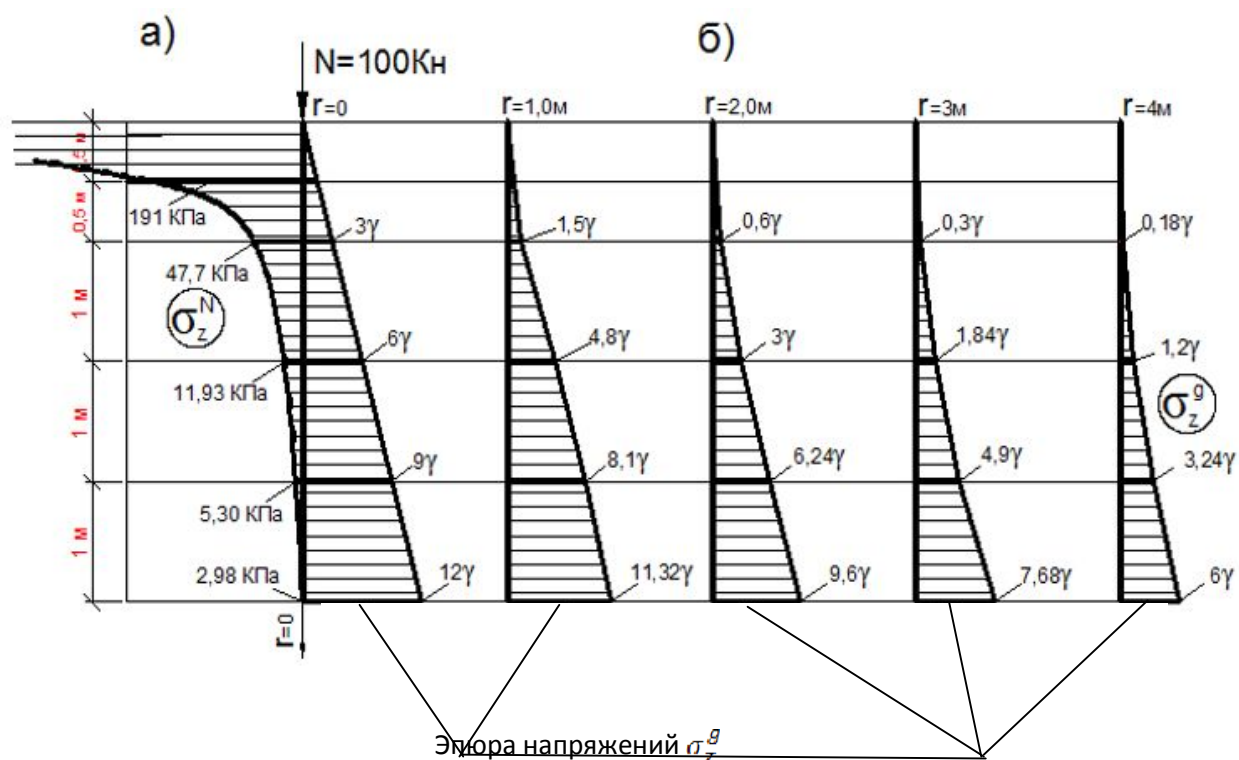


Рис. 3. Эпюры напряжений σ_z^N и σ_z^g от действия сосредоточенной силы N :
 а) эпюра напряжений σ_z^N при $N = 100 \text{ кН}$; б) эпюра напряжений σ_z^g

Предложенный способ определения напряжений может быть использован для определения напряжений и осадок при уплотнении высоких дорожных насыпей, а также для определения осадок фундаментов на насыпях. Следует отметить, что формулах под γ считается удельный вес неуплотненного грунта на поверхности весомого полупространства до приложения силы N .

Список литературы

1. Цытович В.Н. Механика грунтов [Текст] / В.Н.Цытович. -М.: 1963.
2. Далматов Б.И. Механика грунтов, основания и фундаменты[Текст]/ Б.И.Далматов. – Ленинград:Стройиздат, 1988.
3. Ухов С. Б.Механика грунтов, основания и фундаменты[Текст]: Учебное пособие для строит. спец. вузов / Под ред. С. Б. Ухова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1993. – 288 с.
4. Ордобаев Б.С., Апсеметов М.Ч. Механика грунтов, основания и фундаменты [Текст] / Б.С.Ордобаев, М.Ч. Апсеметов. – Бишкек: 2014.
5. СНиП 2.02.01-83*. Основания зданий и сооружений[Текст]. – Москва: 2006. – 48 с.