МАЙЛЫБАШЕВА Ч.С., ИСРАИЛОВА Г.Т.,
КНУ им.Ж.Баласагына

ЗАДАЧА ДРЕВНЕИНДИЙСКИХ УЧЕНЫХ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

На уроках по математике должны быть не только абстрактные задачи. Можно для разнообразия решать и исторические задачи. На кружках и элективных курсах мы рассказываем об ученых Древней Индии.

В новой книге И.И.Баврина «Сборник задач и занимательных упражнений по математике. 5-9 классы» (М., ВЛАДОС, 2013) имеется раздел «Задачи Древней Индии». Мы приводим несколько задач с решениями. Творчество индийских математиков оказало огромное влияние на развитие арифметики (индийская десятичная позиционная нумерация), алгебры (метод рассеивания для решения неопределенных уравнений первой и второй степени с двумя неизвестными) и тригонометрии (бесконечные ряды для синуса, косинуса и арктангенса). Наиболее ранние сведения о математике в Древней Индии относятся к эпохе составления священных религиозно-философских книг «Веды».

Задача Апастамбы

Древнеиндийскому математику Апастамбе (4 в. До н.э.) принадлежит одна из редакций «Сульвасутра» (Правила веревки»), содержащая геометрические построения и связанные с ними вычисления.

Задача 1. Найти сумму кубов первых n натуральных чисел:

1 + 2 + 3 + … + n.

Решение

1	2	…	n
2	2.2	…	2n
…	…	…	…
n	2n	…	n. n

Рассмотрим квадратную числовую таблицу

С одной стороны, сумма чисел в каждом гномоне (наугольнике) дает полный куб

$1 = 1^3$, $2+ 4 + 2 = 2^3$,

$n + 2n + \ldots + n.n + (n – 1)\, n +\ldots + \ldots +2n +n = n^3$

С другой стороны, складывая числа по строкам таблицы, получим

$(1 + 2 + \ldots + n) + 2(1 + 2 + \ldots + n) +\ldots +n(1 + 2 + \ldots+ n) =(1 + 2 + \ldots +n)^2$.

Следовательно,

$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = n^2(n+1)^2/4$.

Задача о сочетаниях (2 в. До н.э.)

Задача 2. Доказать :$C_n^0 +C_n^1 + \ldots + +C^n{}_n= 2^n$

Решение: $2^n = (1+1)^n= C_n^0 + C_n^1 + \ldots +$

Задача о разрезании шахматной доски

В старинной легенде о четырех алмазах рассказывается о восточном властелине. Он был искусным игроком в шахматы и за всю жизнь проиграл лишь четыре раза. В честь мудрецов победителей властелин приказал инкрустировать алмазами четыре поля доски, на которых был заматован его король. Но сын после смерти властелина решил отомстить мудрецам за их победы и потребовал разделить шахматную доску с алмазами на четыре одинаковые части с одним алмазом в каждой. Мудрецы выполнили требование, разрезав доску только по границам между вертикалями и горизонталями доски. Однако жестокий деспот, как гласит легенда, все равно казнил каждого мудреца, используя его часть доски с алмазом.

Задача 2. Как мудрецы разделили шахматную доску с алмазами на четыре одинаковые части с одним алмазом в каждой?

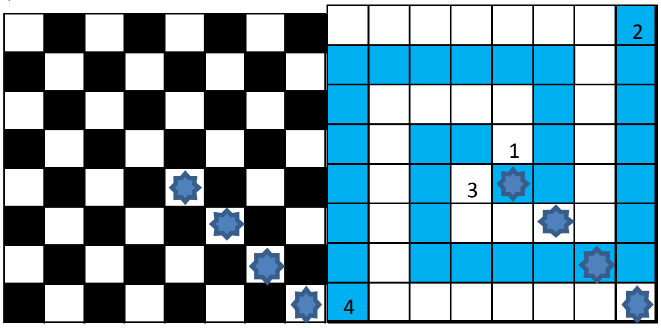
Задача Ариабхаты

Индийский астроном и математик Ариабхата (476 – ок. 550) – автор своеобразной энциклопедии «Ариабхатиам». В этом сочинении собрано все наиболее важное и ценное в индийской математике и астрономии. Первый индийский спутник Земли был запущен с советского космодрома 19 апреля 1975 г. И назван именем великого ученого древности Ариабхаты.

Задача 3. Два лица имеют равные капиталы, причем каждый состоит из известного числа вещей одинаковой ценности и известного числа монет. Но как число вещей, так и суммы денег у каждого различны. Какова ценность вещи?

Решение. Задача сводится к решению уравнения

$ax + b = cx + d$, откудах $= (d – b)/(a-c)$, где у первого лица будет a вещей и b монет, а у второго лица – свещей и dмонет.



Решение задачи показано на рисунке.

Задача Бхаскары 1

Учеником Ариабхаты был Бхаскара 1 (4 в.). Неопубликованная рукопись по математике Бхаскары 1 относится к 522 г. Он придал слоговому обозначению чисел позиционность, ввел слог для обозначения пустого разряда. Один и тот же слог мог служить в данном числе для обозначения 7, 70, 700 и т.д.

Задача 4. Найти натуральные числа, дающие при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 остаток 1 и, кроме того, делящиеся на 7.

Решение. Искомые числах должны удовлетворять соотношениям

$x= 60n + 1$, $x = 7a$,

где n и a- некоторые натуральные числа. Из равенства

$60n + 1 = 7a$ имеем: $a = (60n + 1)/7 = 8n + (4n + 1)/7$.

Для натуральныхаполучаем$n_1 = 5$, $x_1 = 301$; $n_2 = 12$, $x_2 = 721$; …

Задача Брахмагупты

Индийский математик и астроном Брахмагупта (ок. 598-660) – автор сочинения «Усовершенствованное учение Брахмы». В этом сочинении Брахмагупта изложил учение об арифметической прогрессии, решение квадратных уравнений с действительными корнями и др.

Задачи Магавиры

В 9 веке в Индии жил математик и астроном Магавира. В своем «Кратком курсе математики» он ставил вопрос об извлечении корня из отрицательного числа, решал задачи, приводящие к системам линейных уравнений с несколькими неизвестными, суммировал ряды квадратов и кубов членов арифметической прогрессии.

Задача 5. Найти число павлинов в стае, 1/16 которой, умноженная на себя, сидит на манговом дереве, а квадрат 1/9 остатка вместе с 14 другими павлинами – на дереве тамала.

Решение. Задача сводится к решению уравнения

$(1/16^2 + 15^2/ (9^2 16^2)\, x^2 + 14 = x$.

Где x – число павлинов в стае. Отсюда $x_1 = 48$, а $x_2 = 336/17$ не подходит.

Задача 6. Одруг, назови число различных ожерелий, которые можно получить из бриллианта, сапфира, изумруда, коралла и жемчуга.

Решение.

$C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = (1+1)^5 - C_5^0 = 31.$

Задача Шридхары

Индийский математик и астроном Шридхара (9-10 вв.) в сочинении «Патиганита» («Искусство вычисления на доске») излагает методы возведения в квадрат и куб, операции с дробями, занимается решением неопределенных уравнений второй степени с двумя неизвестными и др.

Задача 7. Повар готовит различные блюда с шестью вкусовыми оттенками: острым, горьким, вяжущим, кислым, соленым, сладким. Друг, скажи, каково число всех этих разновидностей?

Ответ: 63.

Задачи Бхаскары 11

Крупнейший индийский математик и астроном Бхаскара 11 (1114 -1185) – автор сочинения «Венец учения», в котором содержались решения алгебраических и теоретико-числовых задач. Вершиной достижений Бхаскары 11 является циклический метод решения в целых положительных числах неопределенного уравнения второй степени с двумя неизвестными.

Задача 8. Прекрасная дева с блестящими очами, ты, которая знаешь, как правильно применять метод инверсии, скажи мне величину такого числа, которое, будучи умножено на3, затем увеличено на ¾ этого произведения, разделено на 7, уменьшено на 1/3 частного, умножено само на себя, уменьшено на 52, после извлечения квадратного корня, прибавления 8 и деления на 10, дает число 2. (Метод инверсии предполагает выполнение действий с конца задачи.)

Решение.

Применив метод инверсии (правило обращения), получим:

1) $2 * 10 = 20$; 7) $14 * \frac{3}{2} = 21;$
2) $20 - 8 = 12$; 8) $21 * 7 = 147$;
3) $12^2 = 144$; 9) $147 * 4/7 = 84$;
4) $144 + 52 = 196$; 10) $84 : 3 = 28$, или короче
5) $\sqrt{196} = 14$;

$X = \sqrt{(2 * 10 - 8)} + 52 * 3/2 * 7 * 4/7 : 3 = 28.$

Задача 9. Решить уравнение $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$.

Решение.

Прибавив к обеим частям данного уравнения по $4x^2 + 400x + 1$, получим

$x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10\,000.$

Извлекая квадратные корни из обеих частей, имеем

$x^2 + 1 = 2x + 100.$

Отсюда $x_1 = 11$, а $x_2 = -9$ как отрицательный не учитывался.

Литература

1. Математика. Изд.дом «Первое сентября», №18,2008.
2. Математика в школе. №5, 2015.