8. Аскалиева Г.О. О динамической скорости водного потока //Н.-т. журнал ИАИТ НАН КР «Проблемы автоматики и управления».– Бишкек: Илим, 2014.–№1.– С. 121-125.

References

1. Presnyakov K.A., Kerimkulova G.K., Askalieva G.O. The main provisions of the model identification unconventional regime parameters of open watercourses // "Results of Science 2014" - Moscow, Russian Academy of Sciences in 2014.

2. Presnyakov K.A., Kerimkulova G.K., Askalieva G.O. Derivation of the average speed and vertical distribution of flow relative turbidity of the water for the semi-empirical theories Karman, Taylor-Taylor 1 and 2 // H.-T. Journal IAIT National Academy of Sciences "Problems of automation and control" .- Bishkek: Ilim, 2012.-№2.- page. 40-46.

3. Askalieva G.O., Turdumambetov E.B. Conversion ratios YA Ibad-Zade for the velocity and turbidity of the water flow to the compact form // H.-T. Journal IAIT National Academy of Sciences "Problems of automation and control" .- Bishkek: Ilim, 2013.-№1.- page. 46-51.

4. Guidelines for the calculation of stable alluvial bed of a mountain river in the design of hydraulic structures. M .: Kolos, 1972. Page 64 .

5. Presnyakov K.A., Kerimkulova G.K. Method of determining the fundamental parameter z in the distribution of the relative turbidity of the water depth of flow (according to K. Zagustinu) //N.-t. Journal IAIT National Academy of Sciences "Problems of automation and control".- Bishkek: Ilim, 2013.-№1.- page . 61-65.

6. Kerimkulova G.K. The rate of water on the bottom of the roughness of the watercourse //N.-t. Journal IAIT National Academy of Sciences "Problems of automation and control".- Bishkek: Ilim, 2014 page .97-101.

7. Kerimkulova G.K., Askalieva G.O. On the bottom rate of water flow //N.-t. Journal IAIT National Academy of Sciences "Problems of automation and control .- Bishkek: Ilim, 2014.-№1.- page. 102 - 107.

8. Askalieva G.O. About dynamic water flow rate //N.-t. Journal IAIT National Academy of Sciences "Problems of automation and control" .- Bishkek: Ilim, 2014.- №1.- page. 121-125.

УДК: 517.977.5

РАЗДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Иманалиев Замирбек Кирешеевич, к.т.н.,профессор КГТУ им. И.Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр. Мира, 66, e-mail: imanaliev.51@mail.ru

Аширбаев Бейшембек Ыбышевич, к.ф-м.н., доцент КГТУ им. И.Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр. Мира, 66, e-mail: ashirbaev-58@mail.ru

Алтымышева Жыргал Алымбековна, ст.преп.КГУСТА им. Н.Исанова, Кыргызстан, г. Бишкек, ул. Малдыбаева, 34-б, e-mail: ajirgal@mail.ru

В данной статье разработан способ разделения движений сингулярно-возмущенной дискретной управляемой системы, которая позволяет разделить исходную систему на две подсистемы меньшего порядка, причем они связаны только управляющей функцией.

При разделении рассмотренной системы указаны условия, гарантирующие отделимость быстрых движений от медленных или наоборот. Во – первых, необходимо найти решения алгебраических уравнений Риккати и Ляпунова, которые могут быть представлены в виде равномерно сходящихся степенных рядов. Во – вторых, при выполнении условия в данной работе и при достаточно малых значениях параметра μ, необходимо проверить условия о близости собственных значений матрицы исходной и разделенной системы.

В работе также приведен алгоритм построения переходной матрицы стационарной линейной дискретной управляемой системы, которая определяется как решение матричного дифференциального уравнения [1].

Ключевые слова: сингулярно-возмущенная система, переходная матрица, дискретная управляемая система, медленная подсистема, быстрая подсистема, малый параметр.

TRAFFIC SEPARATION SINGULARLY PERTURBED DISCRETE SYSTEM

Imanaliev Zamirbek Kireevich, Ph.D., professor KSTU named after I.Razzakov, Kyrgyzstan, 720044, Bishkek, Mira ave. 66, e-mail: imanaliev.51@mail.ru

Ashirbayev Beyshembek Ybyshevich, candidate of physical and mathematical sciences., Associate professor of KSTU named after I.Razzakov, Kyrgyzstan, 720044, Bishkek, Mira ave. 66, e-mail: ashirbaev-58@mail.ru

Altymysheva Jyrgal Alymbekovna, teacher of KGUSTA named after N.Isanov, Kyrgyzstan, Bishkek, Maldybaev, 34-b, e-mail: ajirgal@mail.ru

This article provides a method for separation of motions singularly perturbed discrete control system that allows you to split the initial system into two subsystems of lower order, and they involve only the control function. In the separation of the system under consideration are listed separability conditions guaranteeing fast movements with slow or vice versa. First you must find the solution of algebraic Riccati equations and Lyapunov, which can be represented as a uniformly convergent power series. Secondly, when the condition in this work and for sufficiently small values of the parameter μ, it is necessary to check the terms of the proximity of the eigenvalues of the original and the split system.

In this paper we also present an algorithm for the construction of stationary transition matrix linear discrete control system, which is defined as the solution of the matrix differential equation [1].

Keywords: singularly perturbed system transition matrix, discrete control systems, slow subsystem, the fast subsystem, a small parameter.

Введение. Проектирование алгоритмического обеспечения систем автоматического управления (САУ) объектами с несколькими входами представляет собой сложную задачу. Это обусловлено большим числом возможных видов функций оптимального управления (ОУ), сложностью построения областей существования различных видов функций ОУ в пространстве компонентов массива исходных данных задачи управления вследств его высокой размерности, необходимости разработки большого числа алгоритмов для расчета параметров функций ОУ и.т.д.

Цель статьи – разработать способ разделения движений сингулярно-возмущенной дискретной управляемой системы и указать условия, гарантирующие отделимость быстрых движений от медленных или наоборот.

Рассмотрим систему вида

$$x(t+1) = A_1x(t) + A_2z(t) + B_1u(t), \quad x(t_0) = x_0,\ x(N) = x_1, \quad (1)$$

$$\mu z(t+1) = A_3x(t) + A_4z(t) + B_2u(t), \quad z(t_0) = z_0,\ z(N) = z_1 \quad (2)$$

где $A_1 - (n \times n),\ A_2 - (n \times m),\ A_3 - (m \times n),\ A_4 - (m \times m)$,

$B_1 -\ (n \times n),\ B_2 - (m \times n)$ – постоянные матрицы, $x \in R^n,\ z \in R^m$ – векторы переменных состояния, $u \in R^r$ – вектор управления, $\mu > 0$ – малый параметр, $t = 0,1, \dots, N$.

Предположим, что собственные значения λ_iматрицы A_4 удовлетворяют условию

$$|\lambda_i| < q_0 < 1. \quad (3)$$

Введем замены:

$$x = \tilde{x} - \mu N\tilde{z}, \quad (4)$$

$$z = \tilde{z} + ux, \quad (5)$$

где матрицы H и N имеют размерности $m \times n,\ n \times m$ соответственно.

Преобразуя уравнения (4) и (5) можно получить следующие соотношения:

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & -\mu N \\ H & E_m - \mu HN \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n - \mu NH & \mu N \\ H & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Используя замены (5) с учетом (4) из системы (1) и (2) получаем:

$$x(t+1) = \tilde{A}_1x(t) + A_2\tilde{z}(t) + B_1u(t),\ x(t_0) = x_0,\ x(N) = x_1 \quad (8)$$

$$\mu\tilde{z}(t+1) = \tilde{A}_4\tilde{z}(t) + \tilde{B}_2u(t), \quad \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0, \quad \tilde{z}(N) = \tilde{z}_1,$$

$$\text{где } \tilde{A}_1 = A_1 + A_2H, \quad \tilde{A}_4 = A_4 - \mu HA_2, \quad \tilde{B}_2 = B_2 - \mu HB_1, \quad (9)$$

$$\tilde{z}_i = z_i - Hx_i, \qquad i = 0,1,$$

при условии

$$\mu HA_1 + \mu HA_2H = A_3 + A_4H. \quad (10)$$

Теперь, используя соотношения (4) и (5) из системы (8), получим:

$$\tilde{x}(t+1) = \tilde{A}_1\,\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1u(t),\ \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0,\ \tilde{x}(N) = \tilde{x}_1, \quad (11)$$

$$\mu\tilde{z}(t+1) = \tilde{A}_4\,\tilde{x}(t) + \tilde{B}_2u(t), \quad \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0, \quad \tilde{z}(N) = \tilde{z}_1.$$

где $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_4$, $\tilde{B}_2$, $\tilde{z}_i$ определяются из (9),

$$\tilde{B}_1 = B_1 + N\tilde{B}_2, \quad \tilde{x}_i = x_i + \mu N\tilde{z}_i, \quad i = 0,1, \quad (12)$$

при условии

$$\mu\tilde{A}_1N - N\tilde{A}_4 - A_2 = 0. \quad (13)$$

Уравнения (10) и (13) являются алгебраическими уравнениями Риккати и Ляпунова соответственно. Используя теорему о неявной функции, можно показать, что эти уравнения имеют решения, которые могут быть представлены в виде равномерно сходящихся степенных рядов [2, 3]:

$$H(\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i\mu^i, \quad N(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k\mu^k. \quad (14)$$

Матрицы H_i и N_k $(i,k = 0,1,\ldots)$ однозначно вычисляются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях μ в уравнениях (10) и (13). В результате имеем:

$$H_0 = -A_4^{-1}A_3\,,\quad H_1 = A_4^{-1}H_0(A_1 + A_2H_0),\ldots \tag{15}$$

$$H_i = A_4^{-1}\left(H_{i-1}A_1 + \sum_{j=0}^{i-1} H_jA_2\,H_{v-1}\right),$$

$$i = 1,2,\ldots,\ \ v = i,\qquad i-1,\qquad i-2,\ldots,$$

$$N_0 = -A_2A_4^{-1}\,,\ \ N_1 = (A_1N_0 + A_2H_0N_0 + N_0H_0A_2)A_4^{-1},\ldots,$$

$$N_k = \left[A_1N_{k-1} + A_2\left(\sum_{j=0}^{k-1} H_j\,N_{s-1}\right) + \left(\sum_{j=0}^{k-1} N_jH_{s-1}\right)A_2\right]A_4^{-1},$$

$$k = 1,2,\ldots,\ \ s = i,\qquad i-1,\qquad i-2,\ldots\ .$$

Таким образом, в результате имеем систему (11), у которой медленные и быстрые подсистемы разделены. Они объединяются через управляющую функцию *u(t)*, но имеют различные собственные значения. Свойства управляемости системы (1) те же, что и у системы (11).

Наряду с системой (11) рассмотрим еще систему

$$\bar{x}(t+1) = A_0\bar{x}(t) + B_0\bar{u}(t),\ \ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0\,,\ \ \bar{x}(N) = \bar{x}_1, \tag{16}$$

$$\mu\tilde{z}(t+1) = \tilde{A}_4\tilde{z}(t) + \tilde{B}_2u(t),\qquad \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0\,,\qquad \tilde{z}(N) = \tilde{z}_1,$$

где $A_0 = A_1 + A_2A_4^{-1}A_3,\quad B_0 = B_1 + A_2A_4^{-1}B_2,$ (17)

$\bar{x}$ −вектор переменной состояния системы, которая получается из (1) при $\mu = 0$.

Согласно теореме, доказанной в [4] при выполнении условий (3) и при достаточно малых значениях параметра μ, собственные значения матрицы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_4$ будут близкими к собственным значениям матрицы A_0 и A_4 соответственно. Поэтому система (17) аппроксимирует систему (11) с точностью порядка малости μ и является асимптотической системой по отношению к системе (11).

Решения системы (16) можно представить в виде

$$\bar{x}(t) = A_0^t\bar{x}_0 + \textstyle\sum_{j=0}^{t-1} A_0^{t-j-1}B_0\bar{u}(j), \tag{18}$$

$$\tilde{z}(t) = \tilde{A}_4^{\frac{t}{\mu}}\tilde{z}_0 + \sum_{j=0}^{t-1}\tilde{A}_4^{\frac{t}{\mu}-j-1}\tilde{B}_2u(j),$$

где $\Phi(t) = A_0^t$ и $\Psi(t) = \tilde{A}_4^{\frac{t}{\mu}}$ – переходные матрицы медленной и быстрой подсистемы систем (16).

Для построения переходной матрицы $\Phi(t) = A_0^t$ можно вычислить, непосредственно умножая матрицу A_0 на A_0 необходимое число раз. Однако такой путь эффективен лишь при небольших значениях t. Если же t может принимать большие значения, можно воспользоваться теоремой Кели-Гамильтона о том, что характеристический многочлен матрицы является ее аннулирующим многочленом [5].

Разделив λ^t на характеристический многочлен $P(\lambda) = \det(A_0 - \lambda E)$ матрицы A_0, получаем

$$\lambda^t = P(\lambda)Q(\lambda) + R(\lambda), \tag{19}$$

где *Q(λ)*-частное, *R(λ)* – остаток, причем остаток – это многочлен степени меньше, чем размерность *n* матрицы A_0, имеющей вид

$$R(\lambda) = r_{n-1}\lambda^{n-1} + r_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + r_1\lambda + r_0 \tag{20}$$

Подставив в (19) вместо λ матрицу A_0 получаем

$$A_0^t = R(\lambda), \tag{21}$$

так как по теореме Кели-Гамильтона $P(A_0)=0$.

В случае простых различных корней характеристического уравнения, подставляя корни λ_i в (19), с учетом $P(\lambda_i) = 0$ получаем

$$\lambda_i^t = R(\lambda_i) = r_{n-1}\lambda_i^{n-1} + r_{n-2}\lambda_i^{n-2} + \cdots + r_1\lambda_1 + r_0,\quad i = 1,\ldots,n \tag{22}$$

Если λ_i - действительный корень характеристического уравнения кратности *q*, то, учитывая, что

$$P(\lambda_i) = 0,\qquad P'(\lambda_i) = 0,\ldots,P^{(q-1)}(\lambda_i) = 0,$$

из (19), последовательно дифференцируя, получаем

$$\frac{d^j}{d\lambda^j}\lambda^t\Big|_{\lambda=\lambda_i} = \left(\frac{d^j}{d\lambda^j}R(\lambda)\right)\Big|_{\lambda=\lambda_i},\quad j=0,1,\ldots,q-1. \tag{23}$$

Это система q линейных уравнений относительно коэффициентов $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ многочлена R(λ).

Если $\lambda_{1,2} = a \pm \beta i$ – пара комплексных сопряженных корней кратности q, то из (23) получаем систему 2q уравнений, приравнивая действительные и мнимые части.

Таким образом, из (20) следует, что переходная матрица $\Phi(t) = A_0^t$ линейной стационарной, медленной подсистемы систем (18) имеет вид

$$A_0^t = r_{n-1}A_0^{n-1} + \cdots + r_1A_0 + r_0E, \tag{24}$$

где коэффициенты $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ многочлена, зависящие от дискретного времени t, находятся из (22), (23).

Построение переходной матрицы быстрой подсистемы систем (18) проводится аналогично.

Выводы. Полученные в данной работе результаты будут применены в разработке алгоритмического обеспечения в дискретных задачах оптимального управления с сингулярно-возмущенной дискретной управляемой системы. Поэтому дальнейшие исследования с использованием этих результатов, безусловно, являются актуальными.

Список литературы

1. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. - Москва: Наука, 1976.- 424 с.
2. Геращенко Е.И., Геращенко С.М. Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. – Москва: Наука, 1975.- 296 с.
3. Стрыгин В. В., Соболев В. А. Разделение движений методом интегральных многообразий. – Москва: Наука. 1988. - 256 с.
4. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. О переходных матрицах медленных и быстрых подсистем управляемой системы с малым параметром //Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике. Междунар. научн. конф. – Вестник КГНУ. – Вып 6, сер. 3. - Бишкек, 2001. - С.235 - 239.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1988.- 552 с.

References

1. Andreev Y.N. Managing finite linear objects. - Moscow: Nauka, 1976.-page 424 . (In Russ.)
2. Gerashenko E.I., Gerashchenko S.M. The method of separation of motions and optimization of nonlinear systems. - Moscow: Nauka, 1975.- page 296 . (In Russ.)
3. Strygin V.V., Sobolev V.A. Traffic separation method of integral manifolds. - Moscow: Nauka. 1988. – page 256 . (In Russ.)
4. Imanaliev Z.K., Ashirbayev B.Y. About the transition matrices of slow and fast subsystems controlled system with a small parameter // asymptotic topological and computer methods in mathematics. Intern. Scien. Conf. - Herald KSNU. - Issue 6, Ser. 3. - Bishkek, 2001. – page .235 - 239. (In Russ.)
5. Gantmakher F.R. Matrix theory. Moscow: Nauka, 1988.- page 552 . (In Russ.)

УДК 517.968

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО РОДА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Асанов Рухидин Авытович, к.ф.-м.н., старший преподаватель, КГТУ имени И.Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр. Мира, 66, e-mail: ruhidin_asanov@yahoo.com

Цель статьи - найти необходимые и достаточные условия единственности и неединственности существования и несуществования решения линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с вырожденным ядром. Автор предложил новый подход для решения данного интегрального уравнения третьего рода. Особенностью исследуемой задачи является то, что данное интегральное уравнение третьего рода может иметь любое конченое число особых точек. На основе предложенного метода автор установил необходимые и достаточные условия единственности и существования решения для исследуемой задачи. Кроме того, установлены необходимые и достаточные условия несуществования и неединственности решения данного интегрального уравнения третьего рода. С помощью данного метода задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Показан конкретный пример, иллюстрирующий результаты данной работы. Этот пример решен на основе предложенного метода.

Ключевые слова: линейные, интегральные уравнения Фредгольма третьего рода с вырожденным ядром, существование, единственность, новый подход.

A CLASS OF LINEAR FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE THIRD KIND WITH A DEGENERATE KERNEL

Asanov Ruhidin Avytovich, PhD (Mathematics), senior lecturer of KSTU named after I.Razzakov, Bishkek, 720044 , Kyrgyzstan, e-mail: ruhidin_asanov@yahoo.com

The purpose of the article is to find necessary and sufficient conditions for the uniqueness and non-uniqueness, existence and non-existence of solutions of linear Fredholm integral equations of the third kind with a degenerate kernel. The author proposed a new approach for the solution of the integral equation of the third kind. The peculiarity of the problem is the fact that the integral equation of the third kind can be done for any number of singular points. On the

basis of the proposed method the author has established the necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions of the problem. In addition we establish necessary and sufficient conditions for nonexistence and nonuniqueness of the solution of the integral equation of the third kind. Using this method, the problem is reduced to a system of linear algebraic equations. Author shows a specific example illustrating the results of this work. This example is solved on the basis of the proposed method.

Keywords: linear, integral equations of Fredholm, of the third kind, with a degenerate kernel, existence, uniqueness, a new approach.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение третьего рода.

$$p(t)\varphi(t) = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(t)b_i(s)\, \varphi(s)ds + f(t), t \in [a,b], \tag{1}$$

где $p(a)$=0, $p(t), a_i(t), b_i(t)$ и $f(t)$ – известные непрерывные на $[a,b]$ функции, $\varphi(t)$ - искомая непрерывная на $[a,b]$ функция, $-\infty < a < b < +\infty$, $p(t_i) = 0, i = 1,2,\dots,m$, $a \le t_1 < t_2 < \dots < t_m \le b$.

Различные вопросы для интегральных уравнений первого и третьего рода исследовались в [1-6]. Но основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [3], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. В данной работе построены решения для линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода.

Всюду будем предполагать, что

$$p(t) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{s(i)} p_{i,j}(t), \tag{2}$$

где $p_{i,j}(t_i) = 0, p_{i,j}(t) \in C[a,b], p_{i,j}(t) \ne 0$ при всех $t \ne t_i, i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,\dots,s(i)$.

Пусть

$$c_k = \int_a^b b_k(s)\varphi(s)ds, k = 1,2,\dots,n. \tag{3}$$

Тогда из (1) получим

$$p(t)\varphi(t) = \sum_{k=1}^n c_k a_k(t) + f(t), t \in [a,b], \tag{4}$$

где c_k - неизвестные постоянные, $k = 1,2,\dots,n$.

Полагая $t = t_1$, из (4) имеем

$$\sum_{k=1}^n c_k a_k(t_1) + f(t_1) = 0. \tag{5}$$

Вычитая (5) из (4), получим

$$p(t)\varphi(t) = \sum_{k=1}^n c_k[a_k(t) - a_k(t_1)] + [f(t) - f(t_1)], t \in [a,b]. \tag{6}$$

Предположим выполнение следующих условий:

а) Для всех $k = 1,2,\dots,n; i = 1,2,\dots,m$ и $j = s_{i-1}+1,\dots,s_i$,

$$a_{k,i,j}(t) \in C[a,b], b_k(t) \in C[a,b],$$

где s₀= $0, s_i = \sum_{j=1}^i s(j), a_{k,1,0}(t) = a_k(t), t \in [a,b]$,

$$a_{k,1,j_1}(t) = \frac{a_{k,1,j_1-1}(t) - a_{k,1,j_1-1}(t_1)}{p_{1,j_1}(t)}, (j_1 = 1,\dots,s_1),$$

$$a_{k,2,s_1}(t) = a_{k,1,s_1}(t), a_{k,2,j_2}(t) = \frac{a_{k,2,j_2-1}(t) - a_{k,2,j_2-1}(t_2)}{p_{2,j_2-s_1}(t)},$$

$$(j_2 = s_1+1,\dots,s_2),\dots, a_{k,m,s_{m-1}}(t) = a_{k,m-1,s_{m-1}}(t),$$

$$a_{k,m,j_m}(t) = \frac{a_{k,m,j_m-1}(t) - a_{k,m,j_m-1}(t_m)}{p_{m,j_m-s_{m-1}}(t)}, (j_m = s_{m-1}+1,\dots,s_m).$$

б) Для всех $i = 1,2,\dots,m$, $j = s_{i-1}+1,\dots,s_i$ и $F_{i,j}(t) \in C[a,b]$,

где

$$s_0 = 0, s_i = \sum_{j=1}^i s(j), F_{1,0}(t) = f(t), t \in [a,b],$$

$$F_{1,j_1}(t) = \frac{F_{1,j_1-1}(t) - F_{1,j_1-1}(t_1)}{p_{1,j_1}(t)}, (j_1 = 1,\dots,s_1), F_{2,s_1}(t) = F_{1,s_1}(t),$$

$$F_{2,j_2}(t) = \frac{F_{2,j_2-1}(t) - F_{2,j_2-1}(t_2)}{p_{2,j_2-s_1}(t)},$$

$$(j_2 = s_1+1,\dots,s_2),\dots, F_{m,s_{m-1}}(t) = F_{m-1,s_{m-1}}(t),$$

$$F_{m,j_m}(t) = \frac{F_{m,j_m-1}(t) - F_{m,j_m-1}(t_1)}{p_{m,j_m-s_{m-1}}(t)}, (j_m = s_{m-1}+1,\dots,s_m).$$

Пусть $u(t) \in [a,b]$ является решением уравнения (1). Тогда справедливы (3), (4), (5) и (6). Учитывая (2) условия а) и б), из (6) получим

$$\left(\prod_{j_1=2}^{s(1)} p_{1,j_1}(t)\right)\left(\prod_{i=2}^m \prod_{j=1}^{s(i)} p_{i,j}(t)\right)\varphi(t) = \sum_{k=1}^n c_k a_{k,1,1}(t) + F_{1,1}(t), t \in [a,b]. \tag{7}$$

Если $p(t) = p_{1,1}(t), t \in [a,b]$, то

$$\left(\prod_{j_1=2}^{s(1)} p_{1,j_1}(t)\right)\left(\prod_{i=2}^{m}\prod_{j=1}^{s(i)} p_{i,j}(t)\right) = 1, t \in [a,b].$$

Если $s_1 = s(1) = 1$ и $p(t_2) = 0$, то

$$\prod_{j_1=2}^{s(1)} p_{1,j_1}(t) = 1, t \in [a,b].$$

Если $s_1 > 1$, то, полагая $t = t_1$, из (7) имеем

$$\sum_{k=1}^{n} c_k a_{k,1,1}(t_1) + F_{1,1}(t_1) = 0. \qquad (8)$$

Вычитая (8) из (7) и учитывая условия (2), а) и б), получим

$$\left(\prod_{j_1=3}^{s(1)} p_{1,j_1}(t)\right)\left(\prod_{i=2}^{m}\prod_{j=1}^{s(i)} p_{i,j}(t)\right)\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k a_{k,1,2}(t) + F_{1,2}(t), t \in [a,b]. \qquad (9)$$

Если $s_1 = 2$, то

$$\prod_{j_1=3}^{s(1)} p_{1,j_1}(t) = 1, t \in [a,b].$$

Продолжая этот процесс с уравнением (9), убедимся, что

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k a_{k,m,j_m}(t) + F_{m,j_m}(t), t \in [a,b]. \qquad (10)$$

Далее в силу (3), (5), (8), условий а) и б), для определения неизвестных $c_1, c_2, \dots, c_n$ получим следующую систему

$$\begin{cases} c_k = \int_a^b b_k(s)\varphi(s)ds, k = 1,2,\dots,n, \\ \sum_{k=1}^{n} c_k a_{k,1,j_1-1}(t_1) + F_{1,j_1-1}(t_1) = 0, j_1 = 1,\dots,s_1, \\ \sum_{k=1}^{n} c_k a_{k,2,j_2-1}(t_2) + F_{2,j_2-1}(t_2) = 0, j_2 = s_1+1,\dots,s_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^{n} c_k a_{k,m,j_m-1}(t_m) + F_{m,j_m-1}(t_m) = 0, j_m = s_{m-1}+1,\dots,s_m. \end{cases} \qquad (11)$$

Подставляя (10) в (3), получим

$$c_i = \int_a^b b_i(s)\left[\sum_{k=1}^{n} c_k a_{k,m,j_m}(s) + F_{m,j_m}(s)\right]ds, i = 1,2,\dots,n. \qquad (12)$$

Введем следующие обозначения

$$k_{ik} = \int_a^b b_i(s)a_{k,m,j_m}(s)ds, l_i = \int_a^b F_{m,j_m}(s)b_i(s)ds,\ i,k = 1,2,\dots,n. \qquad (13)$$

Учитывая (13), из (12) получим

$$c_i - \sum_{i=1}^{n} k_{ik}c_k = l_i, i = 1,2,\dots,n. \qquad (14)$$

Введем следующие обозначения

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1-k_{11} & -k_{12} & \cdots & -k_{1n} \\ -k_{21} & 1-k_{22} & \cdots & -k_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -k_{n1} & -k_{n2} & \dots & 1-k_{nn} \end{pmatrix}, L_0 = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ l_n \end{pmatrix},$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1,0}(t_1) & a_{2,1,0}(t_1) & \cdots & a_{n,1,0}(t_1) \\ a_{1,1,1}(t_1) & a_{2,1,1}(t_1) & \cdots & a_{n,1,1}(t_1) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1,1,s_1-1}(t_1) & a_{2,1,s_1-1}(t_1) & \dots & a_{n,1,s_1-1}(t_1) \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} -F_{1,0}(t_1) \\ -F_{1,1}(t_1) \\ \cdots \\ -F_{1,s_1-1}(t_1) \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2,s_1}(t_2) & a_{2,2,s_1}(t_2) & \dots & a_{n,2,s_1}(t_2) \\ a_{1,2,s_1+1}(t_2) & a_{2,2,s_1+1}(t_2) & \cdots & a_{n,2,s_1+1}(t_2) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1,2,s_2-1}(t_2) & a_{2,2,s_2-1}(t_2) & \dots & a_{n,2,s_2-1}(t_2) \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} -F_{2,s_1}(t_2) \\ -F_{2,s_1+1}(t_2) \\ \cdots \\ -F_{2,s_2-1}(t_2) \end{pmatrix},$$

…………………………………………………………………………………

$$K_m = \begin{pmatrix} a_{1,m,s_{m-1}}(t_m) & a_{2,m,s_{m-1}}(t_m) & \dots & a_{n,m,s_{m-1}}(t_m) \\ a_{1,m,s_{m-1}+1}(t_m) & a_{2,m,s_{m-1}+1}(t_m) & \cdots & a_{n,m,s_{m-1}+1}(t_m) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1,m,s_m-1}(t_m) & a_{2,m,s_m-1}(t_m) & \dots & a_{n,m,s_m-1}(t_m) \end{pmatrix},$$

$$L_m = \begin{pmatrix} -F_{m,s_{m-1}}(t_m) \\ -F_{m,s_{m-1}+1}(t_m) \\ \cdots \\ -F_{m,s_m-1}(t_m) \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \\ \cdots \\ K_m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ \cdots \\ L_m \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Учитывая (14) и обозначения (15), запишем систему уравнений (11) в следующей форме

$$KC = L. \tag{16}$$

Теорема. Пусть $r = rang\ K, r_1 = rang\ (K, L)$ где матрицы K и L определены через (15). Тогда:

1) Если $r \neq r_1$, то интегральное уравнение (1) не имеет решений в пространстве $C[a, b]$;

2) Если $r = r_1 = n$, то интегральное уравнение (1) имеет единственное решение в пространстве $C[a, b]$. Это решение определяется формулой (10), где $c_1, c_2, \dots, c_n$ - единственное решение системы (16);

3) Если $r = r_1 < n$, то интегральное уравнение (1) имеет решение в пространстве $C[a, b]$, которое зависит от *n-r* параметров. Эти решения определяются формулой (10), где $c_1, c_2, \dots, c_n$ - решения системы (16). Из них $n - r$ – произвольные постоянные, а оставшиеся r зависят от них.

Доказательство.

1) Пусть $r \neq r_1$. Тогда по теореме Кронекера-Капелли система (16) не имеет решений. Таким образом, интегральное уравнение (1) не имеет решений в пространстве $C[a, b]$.

2) Пусть $r = r_1 = n$. Тогда по теореме Кронекера-Капелли система (16) имеет единственное решение. Таким образом, интегральное уравнение (1) имеет единственное решение в пространстве $C[a, b]$. Это решение определяется по формуле (10), где $c_1, c_2, \dots, c_n$ - единственное решение системы (16).

3) Пусть $r = r_1 < n$. Тогда по теореме Кронекера-Капелли система (16) имеет решение, которое зависит от $n - r$ параметров. Поэтому интегральные уравнения имеют решения в пространстве $C[a, b]$, зависящие от *n-r* параметров. Эти решения определяются по формуле (10), где $c_1, c_2, \dots, c_n$ - решения системы (16). Из них $n - r$ произвольные постоянные, а остальные r зависят от них.

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$t(t-1)\varphi(t) = \int_0^1 \left(1 + \sqrt{t} + t^2 s\right)\varphi(s)ds + \alpha_0(1 + \sqrt{t}) + \alpha_1 t + \alpha_2 t^3, t\epsilon[0,1], \tag{17}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 -$ параметры. В этом случае $t_1 = 0, t_2 = 1, n = 2, m = 2,$

$$s(1) = 2, s(2) = 1, s_1 = 2, s_2 = 3, p_{1,1}(t) = p_{1,2}(t) = \sqrt{t},$$

$$p_{2,1}(t) = t - 1, a_1(t) = a_{1,1,0}(t) = 1 + \sqrt{t}, b_1(t) = 1, a_2(t) = a_{2,1,0}(t) = t^2,$$

$$b_2(t) = t, f(t) = F_{1,0}(t) = \alpha_0\left(1 + \sqrt{t}\right) + \alpha_1 t + \alpha_2 t^3, a_{1,1,1}(t) = 1,$$

$$a_{2,1,1}(t) = t\sqrt{t}, a_{1,1,2}(t) = a_{1,2,2}(t) = 0, a_{2,1,2}(t) = a_{2,2,2}(t) = t,$$

$$a_{1,2,3}(t) = 0, a_{2,2,3}(t) = 1, F_{1,1}(t) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{t} + \alpha_2 t^2\sqrt{t},$$

$$F_{1,2}(t) = F_{2,2}(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t^2, F_{2,3}(t) = \alpha_2(t+1), t \in [0,1].$$

Тогда в силу (10) и (16) функция

$$\varphi(t) = c_2 + \alpha_2(t+1), t \in [0,1] \tag{18}$$

является решением уравнения (17) тогда и только тогда, когда неизвестные постоянные c_1, c_2 удовлетворяют следующей системе

$$\begin{cases} c_1 = -\alpha_0, \\ c_2 = -\alpha_1 - \alpha_2, \\ c_1 = c_2 + \frac{3}{2}\alpha_2, \\ c_2 = \frac{10}{3}\alpha_2. \end{cases} \tag{19}$$

Выводы: Полученный результат показывает, что линейные интегральные уравнения Фредгольма третьего рода с вырожденным ядром эквивалентны системе линейных алгебраических уравнений.

Список литературы

1. Цалюк З.Б. В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Матем. Анализ, М., 1977, т.15, с.131-198.
2. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода //Журн. Вычисл. Матем. и матем. физики. 1979, т.19, №4, с.970-989.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980, 286 с.
4. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода //. Доклады АН СССР, 1989, т-309, №5, с.1052-1055.
5. Иманалиев М.И., Асанов А. Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Доклады РАН, 2007, т.415, №1, с.14-17.
6. Иманалиев М.И., Асанов А., Асанов Р.А. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода // Докл. РАН, - 2011, т. 437, №5, с. 592-596.

References

1. Tsaliuk Z.B. In the book: Itogi nauki i tehniki. Ser. Matem. Analiz, M., 1977, t.15, p.131-198.

2. Magnitsky N.A. Linear Volterra Integral Equations of the first and third kind // Journ. Vychisl. Matem. i matem. fiziki. 1979, t.19, №4, p.970-989.

3. Lavrentev M.M., Romanov V.G., Shishatsky S.P. Ill-posed problems of mathematical physics and analysis. M.: Nauka, 1980, 286 p.

4. Imanaliev M.I., Asanov A. On solutions of systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind // Doklady AN SSSR, 1989, t-309, №5, p.1052-1055.

5. Imanaliev M.I., Asanov A. Regularization and uniqueness of solutions of systems of nonlinear Volterra integral equations of the third kind // Doklady RAN, 2007, t.415, №1, p.14-17.

6. Imanaliev M.I., Asanov A., Asanov R.A. A class of systems of linear Fredholm integral equations of the third kind // Doklady RAN, - 2011, t. 437, №5, p. 592-596.

УДК: 517.928

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

Усенов Иззат Абдыраевич, Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, к.ф.-м.н.,доцент, г .Бишкек, Кыргызстан, iausen@mail.ru

Многие прикладные задачи физики и геофизики сводятся к неявным операторным уравнениям первого рода. К таким уравнениям сводятся также обратные задачи математической физики в тех случаях, когда выражение для функции Грина неизвестно.

Обратная задача электрокаротажа скважин, определяющая месторождения и подсчет запасов полезных ископаемых, является примером таких задач.

Вышеперечисленные прикладные задачи являются актуальными задачами современной науки, решение их может открыть новые грани современного состояния развития человечества. В связи с этим подчеркивается важность исследования некорректно поставленных задач.

В данной работе предлагается комбинированный метод нового типа, объединяющий идеи метода М.М. Лаврентьева, метода Ньютона-Канторовича для регуляризации решения неявного операторного уравнения первого рода.

Ключевые слова: неявный оператор, регуляризация, пространство Гильберта, дифференциал Фреше, линейный оператор, ограниченность опратора, условия Липшица.

COMBINED REGULARIZATION METHOD FOR SOLUTION OF NONLINEAR OPERATOR EQUATIONS OF FIRST KIND

I.A. Usenov, Ph.D., associate professor, Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan, iausen@mail.ru

Many applied problems of physics and biophysics reduced to implicit operator equations of the first kind. These equations are reduced and inverse problems of mathematical physics in cases where the expression for the Green's function is unknown.

The inverse problem of determining the electric logging wells field and calculation of reserves of mineral resources is an example of such problems.

The above application tasks are urgent tasks of modern science, these tasks can discover new facets of the current state of human development. In this regard, the study underlines the importance of ill-posed problems

In this paper, we propose a combined method of a new type, combining ideas of the method of M. M Lavrentiev, Newton-Kantorovich method for regularizing the solution of implicit operator equations of the first kind.

Keywords: implicit operator, regularization, Hilbert space, the Frechet differential, linear operator bounded opratora, Lipschitz condition.

1. Постановка задач:

Рассмотрим неявное операторное уравнение первого рода относительно z вида

$$\Phi(z,u)=0, \tag{1}$$

где $\Phi: H\times H \to H$, H - гильбертово пространство.

Предполагаем, что