МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
КЫРГЫЗСКО-УЗБЕКСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.928

Халматов Анвар Авазович

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ С ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент НАН КР Алымкулов К.

Ош-2015

О Г Л А В Л Е Н И Е

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И ОСНОВНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

- $\forall$ – квантор общности.
- $\exists$ – квантор существования.
- $\in$ – знак принадлежности.
- $C^\infty[0,1]$ – множество дифференцируемых функций на отрезке [0,1].

  Например, если функции $f(x),g(x)\in C^\infty[0,1]$, то их разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $x=0$, записываются в виде $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$,

  $g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k$, где $f_k=f^{(k)}(0)/k!$, $g_k=g^{(k)}(0)/k!$.

  Отметим, что эти ряды являются асимптотическими рядами, т.е.

  $$f(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k x^k+O(x^{n+1}),\ \ g(x)=\sum_{k=0}^{n} g_k x^k+O(x^{n+1}),\quad x\to 0\ .$$

- $0<\varepsilon<<1$ – малый положительный параметр.
- $l,l_1,l_2,...$ – постоянные, не зависящие от малого параметра ε.
- Всюду в диссертации $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$,... обозначают функции из класса $C^\infty[0,1]$. А также через $b^{(i,j,k)}(x)$ обозначим коэффициенты при выражениях $x^j\ln^k x$ в функциях $u_i(x)$.

Ссылка к формулам разделяется тремя точками, сначала номер главы, затем номер параграфа и последний номер формулы и они отделяются точками.

Def.1. Переменная x в исходном сингулярно возмущенном уравнении называется внешней переменной, а его решение зависящее от x – внешним решением.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Асимптотический анализ постоянно растет в силу своей внутренной потребности, например, в теории чисел: распределение простых чисел, оценка числа простых чисел; в теории вероятностей: законы больших чисел и.т.д, а также под влиянием различных прикладных задач небесной механики, радиофизики, механики жидкостей и газа, квантовой механики, математической биофизикии медицины и других прикладных исследований. К этому разделу также относится терии возмущений (пертурбаций) дифференциальных уравнений. Впервые такие регулярно возмущенные уравнения возникли в небесной механике. И в теории возмущений возник классический метод разложения по малому параметру решений дифференциальных уравнений, если эти уравнения зависят от малого параметра регулярным образом. Так как если исходное, изучаемое дифференциальнное уравнение зависит от малого параметра аналитически (или достаточно гладко), то решение этого уравнения является также аналитической функцией по малому параметру (гладкой функцией, т.е. разлагается в ряд Тейлора с остаточным членом). В теорию классического метода возмущений большой вклад внес французский математик Анри Пуанкаре (Jules Henri Poincaré).

Он, впервые дал строгое определение асимптотического ряда.

В изучении вопросов обтекания тел механики жидкостей и газа возникли сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения, родоначальником появления этой теории, по видимому, был немецкий механик Людвиг Прандтль (Ludwig Prandtl).

Решения сингулярно возмущенных уравнений с малым параметром при производной не зависят от малого параметра регулярным образом. Поэтому при построении асимптотики решения этих уравнений возникают определенные трудности, в связи понижением порядка или появлением особой точки соответствующего невозмущенного уравнения.

Кроме того, в радиофизике также, возникло сингулярно возмущенное уравнение Ван-дер-Поля (Van der Pol- датский инженер).

По словам известных математиков К. Фридрихса (K. Friedrich) и Л. Сегал (L. Segel) “асимптотическое описание является прекрасным математическим инструментом анализа явлений природы и имеет глубокое значение для прикладной математики и вычислительной математики”.

Поэтому, разработка методов построения асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений вызывает большой интерес для прикладных исследований.

Возмущенные сингулярные дифференциальные уравнения можно делить на три класса. К первому классу можно отнести дифференциальные уравнения с малым параметром при старших производных, что при нулевом значении малого параметра порядок рассматриваемого уравнения понижается. Такие уравнения исследованы в трудах Л. Прандтля, Г. Биркгофа, М. Нагумо, И.С. Градштейна, К. Фридрихса, В. Вазова, А.Н. Тихонова, А. Эрдейи, Н. Левинсона, А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова, М. Иманалиева, О' Малли, Е.Ф. Мищенко, Л.С. Понтрягина, Ван Дайка, Дж. Коула, С.А. Ломова, К.А. Касымова, А.М. Ильина, В.П. Маслова, Н.Х. Розова, П.С. Панкова, С. Каримова, К. Какишова, К.С. Алыбаева и др.

Теорема существовании решений таких уравнений доказана А.Н. Тихоновым. Разложения асимптотических решений этих уравнений получены А.Б. Васильевой, В. Вазовым (W. Wasov), Й. Сибуйа (Y. Sibua) методом сращивания внешнего и внутреннего решений (МСВИВР).

Параллельно с МСВИВР разрабатывалась метод составных разложений (method of composite expansion) или метод погранслоя. Начало этого метода были положены в работах Ж.У. Латта (G. Latta) и Е. Бромберга (E. Bromberg). Систематически МСВИВР был применен Л.А. Люстерником, М.И. Вишиком для линейных сингулярно возмущенных уравнений в частных производных. Этот метод для сингулярно возмущенных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (в частности и для сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений) был разработан М. Иманалиевым.

Для представления равномерно точного решения на всем рассматриваемом отрезке для сингулярно возмущенных уравнений разработаны следующие методы:

1. Метод погранфункций, или его зарубежное составное разложение (the method of composite expansion) представляет решения сингулярно возмущенных уравнений в виде суммы асимптотического ряда, функций зависящих от исходной и «быстрой» переменных.

2. Метод сращивания внешнего и внутреннего разложений решения. Для разработки этого метода большой вклад внесли С. Каплун (S. Kaplun), М. Ван-Дайком (M. van Dyke), Дж. Коул (J.D. Cole), А.М. Ильин, В.Г. Мазья, С.А. Назаров, Б.А. Пламеневский и др.

Метод сращивания (МС) обоснован А.М. Ильиным.

Метод сращивания Ван-Дайка упрощен К. Алымкуловым и в результате чего разработан новый метод структурного сращивания (МСС).

3. Метод ВКБ (Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна) или метод Лиувилля-Грина, который применяется к уравнениям второго порядка с большим параметром.

4. Метод регуляризации Ломова, который обычно применяется для линейных сингулярно возмущенных уравнений с малым параметром при старших производных.

Второй класс сингулярно возмущенных уравнений начал изучать английский математик и механик М.Дж. Лайтхилл (M.J. Lighthil).

Ко второму классу можно отнести такие возмущенные уравнения, которые при нулевом значении малого параметра порядок уравнений не понижается, однако, у невозмущенного уравнения появляется особая точка. Классический метод малого параметра, для построения асимптотики решений таких уравнений не применим, так как с увеличением порядка приближения по малому параметру в окрестности особой точки их особенность возрастают и перестают приближаться к точному решению. Это явление напоминает «бисингулярную задачу» или «задачу с точкой поворота».

Изучению второго класса особых возмущений, кроме работ М.Дж. Лайтхилла, посвящены работы В. Вазова, И. Сибуйя, и К.Ж. Такахаси, К. Комстока (C.Comstok), П. Хабетса (P.Habets), Цянь-Сюэ-сена, М.Ф. Притуло, Дж. Темпла и других.

К третьему классу можно отнести сингулярно возмущенные уравнения с малым параметром, которые рассматриваются на бесконечном отрезке времени. К такому классу относится, в частности, модельные уравнения Лагерстрома.

$$v''(r)+\frac{k}{r}v'(r)+v(r)v'(r)+\beta\left(v'(r)\right)^2=0,\ v(\varepsilon)=0,\ v(\infty)=1$$

где $0<\varepsilon<<1,\ k\in N,\ 0<<\beta-\text{числовой параметр}.$

<u>Цель работы</u>.

1. Разработать аналог метода погранфункций для сингулярно возмущенного модельного уравнения Лайтхилла, с регулярными особыми точками.

2. Разработать новый аналитический метод равномерного разложения для сингулярно возмущенного модельного уравнения Лайтхилла, который дает обобщенный асимптотический ряд Пуанкаре.

<u>Методы исследования</u>. Применяются: метод полной математической индукции, метод преобразований, идеи метода структурного сращивания и метода погранфункций. Используются различные оценки сингулярных интегралов.

<u>Научная новизна</u>. 1. Впервые получены равномерные асимптотические приближения модельного уравнения Лайтхилла с помощью обобщенного метода погранфункций. Отметим, что ранее метод погранфункций применялись только для уравнений с малым параметром при старших производных, в случае асимптотической устойчивости решения быстрого времени, которые не содержат особые точки.

2. Создан новый метод, при помощи которого получены обобщенные асимптотические разложения Пуанкаре, который обобщает метод структурного сращивания и метод погранфункций.

Теоретическая и практическая ценность. Настоящая работа, хотя носит теоретический характер, но ее результаты могут найти приложение в механике жидкостей и газа, в квантовой механике и других областях техники и науки. А также созданные в диссертации методы могут быть применены к другим сингулярно возмущенным уравнениям с особыми точками.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Впервые получены равномерные асимптотические приближения модельного уравнения Лайтхилла с помощью обобщенного метода погранфункций. Оценка остаточных членов являются более точными, чем в методе структурного сращивания.

2. Разработан новый метод Пуанкаре для получения равномерных асимптотических разложений решений модельного уравнения Лайтхилла, который является более общим чем, метод погранфункий. Этот метод дает обобщенный асимптотический ряд Пуанкаре для решения.

Апробация результатов. Результаты настоящей работы докладывались и обсуждались на семинарах:

- на городском семинаре математиков г.Ош (рук. проф. К. Алымкулов);
- на конференции посвященной 70-летию проф. Б. Арапова 2013 г (г.Ош);
- на конференции посвященной 20-летию КРСУ;
- на конференции посвященной 20-летию КУУ.

Публикации по теме диссертации.

Основное содержание настоящей работы опубликовано в десяти статьях [1-10]. В работах [2, 10] К. Алымкулову принадлежит постановка проблемы, а автору – доказательства теорем.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из трех глав, содержащих 11 параграфов и списка использованных литератур, всего 87 страниц. Ссылки на формулу трехзначная: первая цифра указывает на номер главы, вторая номер параграфа, третья на номер формулы.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУР

§ 1.1 Общий обзор по теории сингулярно возмущенных уравнений с особыми точками

В [1] Лайтхилл для создания своего метода изучил следующее модельное уравнение

$$\left(x+\varepsilon u(x)\right)\frac{du(x)}{dx}=-q(x)u(x)+r(x),\ u(1)=b, \tag{1.1.1}$$

где $0<\varepsilon$ – малый параметр, $0\le x\le 1$ – независимая переменная, b – известная постоянная, $q(x),r(x)\in C^{\omega}[0,1]$ – аналитические функции на отрезке [0;1], $u(x)$– искомая функция.

Для невозмущенного уравнения (1.1.1), где $\varepsilon=0$:

$$Lu_0(x):=x\frac{du(x)}{dx}+q(x)u_0(x)=r(x),\ \ u_0(1)=b, \tag{1.1.2}$$

точка $x=0$ является регулярной особой точкой.

Решение задачи (1.1.2) представляется в виде:

$$u_0(x)=x^{-q_0}w(x), \tag{1.1.3}$$

где

$$P(x)=\exp\{\int_1^x\left(q_0-q(s)\right)s^{-1}ds\}\in \mathrm{C}^{\omega}[0,1],$$

$$w(x)=P(x)[w_0+\int_0^x s^{q_0-1}P^{-1}(s)\ r(s)ds]\in \mathrm{C}^{\omega}[0,1],$$

$$A=\int_0^1 P^{-1}(s)s^{q_0-1}r(s)ds,\ w_0=(b-A)P(0).$$

Предполагается, что $w_0\ne 0$. Тогда из (1.1.3) видно, что $u_0(x)$- не является гладкой в точке $x=0$, поэтому если искать решение задачи (1.1.1)-(1.1.2) обычным *классическим методом малого параметра* в виде:

$$u(x)=u_0(x)+\varepsilon u_1(x)+\varepsilon^2u_2(x)+..., \tag{1.1.4}$$

тогда для определения функций $u_k(x)$ получим следующие уравнения:

$$Lu_1(x)=-u_0(x)\frac{du_0(x)}{dx},\quad u_1(1)=0, \tag{1.1.5$_1$}$$

---

[1]Lighthill M.J., A technique for rendering approximate solution to physical problems uniformly valid // Phil. Magazine. –1949. – No. 40. - P.1179-1201.

$$Lu_2(x) = -u_0(x)\frac{du_1(x)}{dx} - \frac{du_0(x)}{dx}u_1(x), \quad u_2(1) = 0, \tag{1.1.5$_2$}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Lu_n(x) = -\sum_{\substack{i+j=n-1\\ i,j\ge 0}} u_i(x)\frac{du_j(x)}{dx}, \quad u_n(1) = 0, \tag{1.1.5$_n$}$$

Как видно, из правой части уравнения (1.1.5$_1$) особенность функций в правой части увеличивается в точке $x = 0$.

Задача (1.1.5$_1$) запишется в виде:

$$Lu_1(x) \sim w_0^2 u_k(x) \sim O\left(x^{-q_0-(q_0+1)k}\right), x \to 0, \quad (k = 1,2,3,\ldots) x^{-3},\ x \to 0,$$

Поэтому, отсюда имеем

$$u_1(x) \sim -\frac{q_0 w_0^2}{q_0+1} x^{-2q_0-1},\ x \to 0.$$

Видно, что особенность функции $u_1(x)$ усиливается в точке $x = 0$. Можно показать, что

$$u_k(x) \sim O\left(x^{-q_0-(q_0+1)k}\right), x \to 0, \quad (k = 1,2,3,\ldots).$$

Поэтому, решение (1.1.4) представляется в виде

$$u(x) \sim x^{-q_0}\left[w_0 + \alpha_1\left(\varepsilon x^{-(q_0+1)}\right) + \alpha_2\left(\varepsilon x^{-(q_0+1)}\right)^2 + \ldots + \alpha_n\left(\varepsilon x^{-(q_0+1)}\right)^n + \ldots\right],\ x \to 0, \tag{1.1.6}$$

где $\alpha_k = const$. Из (1.1.6) видно, это решение является асимптотическим приближением задачи (1.1.1), только на отрезке $(\varepsilon^{1/(q_0+1)}, 1]$.

Значит, обычным методом малого параметра мы не решим задачу (1.1.1). Поэтому Лайтхилл предложил искать решение задачи (1.1.1) в виде:

$$u(\xi) = u_0(\xi) + \varepsilon u_1(\xi) + \varepsilon^2 u_2(\xi) + \ldots, \tag{1.1.7}$$

$$x = \xi + \varepsilon x_1(\xi) + \varepsilon^2 x_2(\xi) + \ldots,$$

Подставляя (1.1.7) в (1.1.1) для определения известных функций $u_k(\xi),\ x_k(\xi)$ получаем одно уравнение, такое что, чтобы функции $u_{k+1}(\xi),\ x_{k+1}(\xi)$ были менее сингулярны, чем $u_k(\xi),\ x_k(\xi)$.

Обоснованию метода Лайтхилла посвящены работы В. Вазова, Сибуйя и Тахакаси, когда $p(x), q(x), r(x) \in C^\infty[0,1]$, П. Хабетса при $p(x), q(x), r(x) \in C^2[0,1]$.

Притуло, Мартин, Ашер предложили алгебраический вариант метода Лайтхилла. Однако, К. Комсток [2] на примерах, а затем К. Алымкулов [3] в общем случае показали, что в применении метода Лайтхилла возникает лишнее условие:

$$x\frac{du_0(x)}{dx} \neq 0,\ x\in(0,1), \tag{1.1.8}$$

Темпл Дж. на примере предложил идею униформизации задачи (1.1.1). К. Алымкулов в общем случае доказал, что проблема (1.1.1) эквивалентна к следующей униформизованной задаче:

$$\xi\frac{du(\xi)}{d\xi} = -q\big(x(\xi)\big)u(\xi)+r\big(x(\xi)\big),\ u(1)=a, \tag{1.1.9}$$

$$\xi\frac{dx(\xi)}{d\xi} = x(\xi)+\varepsilon u(\xi),\ x(1)=1,$$

где $\xi\in[\xi_0(\varepsilon),1]=\mathrm{J}(\varepsilon),\ 0<\xi_0(\varepsilon),\ \xi_0(0)=0$.

Это уравнение единственным образом определяет решение (1.1.3). Конечно, чтобы уравнение (1.1.1) и (1.1.4) были эквивалентны, должно выполнятся условие: $x(\xi)+\varepsilon u(\xi)\neq 0$. Отметим, что в этом методе устраняется лишнее условие Вазова.

Например, в [3] доказана следующая

Теорема 1.1 Пусть $q(x),r(x)\in C^{\infty}[0,1],\ q(0)=m\in N,\ \ w_0>0$. Тогда

1) решение задачи (1.1.4) представимо в виде (1.1.7), который сходится равномерно на отрезке $\mathrm{J}(\varepsilon)$;

2) точке $x=0$ соответствует точка $\mathrm{J}(\varepsilon)=o\left(\varepsilon^{\frac{1}{m+1}}\right)>0$;

3) $x(\xi)+\varepsilon u(\xi)\neq 0$ при $\xi\in\left[\mathrm{J}(\varepsilon),1\right]$.

Замечание 1. Из условия 3) этой теоремы вытекает, что уравнения (1.1.1) и (1.1.4) эквивалентны.

---

[2]Comstok C. The Poincare-Lighthill perturbation technique and its generalizations // SIAM Review. - 1972. - V.14, № 3. – P. 433-443.

[3]Алымкулов К. Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач. - Бишкек: Илим, 1992. - 138 с.

Замечание 2. Если $w_0 < 0$, то $x(\xi)+\varepsilon u(\xi)=0$ при $0<\xi=\xi_0(\varepsilon)$ и $x(\xi)+\varepsilon u(\xi)\neq 0$ при $(\xi_0(\varepsilon),1]$, т.е. решение задачи (1.1.1) не существует на отрезке $[0,1]$.

Туркманов Ж.К. применил метод униформизации к модельному уравнению Лайтхилла в случае, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет слабую особую точку, и к некоторым возмущенным интегро-дифференциальным уравнениям.

Жээнтаева Ж.К. применяя метод структурного сращивания для возмущенного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой построила явные равномерные приближения асимптотики решения начальной задачи Коши.

Зулпукаров А.З. применил метод структурного сращивания для получения асимптотики решений краевых задач бисигулярно возмущенных дифференциальных уравнений второго порядка, т.е. для уравнений с малым параметром при старших производных, в случае когда невозмущенное уравнение имеет точку поворота (слабую особую точку – модельное уравнение Коула и регулярную особую точку).

Абдуллаева Ч.Х. обобщила метод униформизации к уравнениям вида

$$\left(x+\varepsilon u'(x)\right)u''(x)+q(x)u'(x)+p(x)u(x)=r(x),$$

$$u(1)=u^{(0)},\ u'(1)=u^{(1)},$$

где $u^{(0)},u^{(1)}$ – заданные постоянные, $0<\varepsilon<<1$ – малый параметр, $x\in[0,1]$ – независимая переменная, $u(x)$ – искомая функция.

Через У обозначено условие: $p(x),q(x)$, $r(x)\in C^{\infty}[0,1]$.

§ 1.2 Об асимптотике решения одного транцендентного алгебраического уравнения

В § 2.1 мы сталкиваемся с решением алгебраического трансцендентного уравнения

$$\alpha\varepsilon \ln y^{-1} = y, \tag{1.2.1}$$

где $0<\varepsilon<<1, 0<\alpha\in R$, y - неизвестная величина. За нулевое приближение этого уравнения берем $o<y_0=\varepsilon\ln\varepsilon^{-1}<<1,\ \varepsilon\to 0$.

Теперь сделаем постановку

$$y=\left[\alpha\varepsilon\ln\frac{1}{\alpha\varepsilon}\right](1+z), \tag{1.2.2}$$

тогда имеем

$$(1+z)\alpha\varepsilon\ln\frac{1}{\alpha\varepsilon}=\alpha\varepsilon\ln\frac{1}{(1+z)l\,\mathrm{n}\frac{1}{\alpha\varepsilon}}\Rightarrow$$

$$(1+z)\ln\frac{1}{\alpha\varepsilon}=\ln\frac{1}{\alpha\varepsilon l\,\mathrm{n}\frac{1}{\alpha\varepsilon}}-\ln(1+z),$$

отсюда получаем

$$z=-\mu_2-\mu_1\ln(1+z), \tag{1.2.3}$$

где введенные малые параметры

$$\mu_1=\left(\ln\frac{1}{\alpha\varepsilon}\right)^{-1},\ \mu_2=\frac{1}{\ln\frac{1}{\alpha\varepsilon}}\ln\ln\frac{1}{\alpha\varepsilon},\ \varepsilon\to 0.$$

Теперь применяя теорему о неявных функциях к уравнению (1.2.3) получим

$$z=-\mu_2-\mu_1\sum_{\substack{i+j=1\\ i,j\geq 0}}^{\infty}a_{ij}\mu_1^i\mu_2^j, \tag{1.2.4}$$

где a_{ij}– определенные коэффициенты которые определяются постановкой (1.2.4) в уравнение (1.2.3). Сходимость ряда (1.2.3) определяется методом мажорант. Из (1.2.2) вытекает, что главная асимптотика решения уравнения (1.1.1) имеет вид

$$y \sim \alpha\varepsilon\ln\frac{1}{\alpha\varepsilon},\ (\varepsilon\to 0). \tag{1.2.5}$$

§ 1.3 Обзор результатов полученных в данной диссертации

Во второй главе метод погранфункций обобщается для сингулярно возмущенного уравнения Лайтхилла с регулярой особой точкой.

Доказаны следующие теоремы

Теорема 2.1. Пусть выполнено условие У 2.1 $r_0 < 0$. Тогда решение задачи (1.1.1) представимо в виде асимптотического ряда

$$u(x) = \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + \pi_0(t) + u_0(x) + \left(\pi_1(t) + u_1(x)\right)\mu + \left(\pi_2(t) + u_2(x)\right)\mu^2 + \\ + \ldots + \left(\pi_n(t) + u_n(x)\right)\mu^n + R_{n+1}(x,\mu)\mu^{n+1}, \tag{1.3.1}$$

где

$$\left|R_n(x,\mu)\right| \le l, \forall x \in [0,1], \varepsilon x_0^{-1} = (\ln\frac{1}{\varepsilon})^{-1} = \mu, \quad x = x_0 t\ , \ \varepsilon x_0^{-1} = \frac{1}{\ln\frac{1}{\varepsilon}} = \mu,\ x = x_0 t\ ,$$

где $x_0 = x_0(\varepsilon)$решение уравнения $\dfrac{\varepsilon \ \ln x_0^{-1}}{x_0} = 1$.

Теорема 2.2 Пусть выполнено условие У и $q_0 = 1/2$. Тогда, решение задачи (1.1.1) представляется в виде асимптотического ряда

$$u(x) = \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + \pi_0(t) + u_0(x) + \left(\pi_1(t) + u_1(x)\right)\mu + \left(\pi_2(t) + u_2(x)\right)\mu^2 + \ldots + \left(\pi_n(t) + u_n(x)\right)\mu^n + \ldots,$$
$$t = x/\mu^2, \quad \varepsilon = \mu^3. \tag{1.3.2}$$

Пример 2.2

$$\left(x + \varepsilon u(x)\right)u'(x) + \frac{1}{2}u(x) = x,\ u(1) = b, \tag{1.3.3}$$

Уравнение $xu'(x) + \frac{1}{2}u(x) = x,$ имеет регулярное решение

$$u_0(x) = \frac{2}{3}x.$$

Уравнение для $\pi_0(t)$ имеет вид

$$\left(t + \pi_{-1}(t)\right)\pi_0'(t) + \left(\pi_{-1}'(t) + \frac{1}{2}\right)\pi_0(t) = -\frac{2}{3}\mu^2 t\pi_{-1}'(t),\ \pi_0\left(\tilde{\mu}\right) = 0,\ \tilde{\mu} = 1/\mu^2.$$

Решение этого уравнения представляется в виде

$$\pi_{-1}(t) = \frac{2}{3\left(t + \pi_{-1}(t)\right)}\int_t^{\mu} X(t)X^{-1}(s)\pi_{-1}'(s)\mu^2 s ds,$$

где

$$X(t)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^{\mu}\frac{ds}{s+\pi_{-1}(s)}ds\right\}.$$

Отсюда следует, что $\left|\pi_{-1}(t)\right|\le\frac{2}{3}$.

Поэтому асимптотику решения задачи (1.3.3) можно записать в виде

$$u(x)=\frac{1}{\mu}\pi_{-1}(t)+\frac{2}{3}x+\pi_0(t)+O(\mu),\ x=\mu^2t,\ \varepsilon=\mu^3.$$

Теорема 2.3 Пусть выполнено условие У и $q_0=p/q,\ p,q\in N;p<q.$ Тогда, решение задачи (1.1.1) представляется в виде асимптотического ряда

$$u(x)=\mu^{-p}\pi_{-p}(t)+\ldots+\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+\pi_0(t)+u_0(x)+\left(\pi_1(t)+u_1(x)\right)\mu+\left(\pi_2(t)+u_2(x)\right)\mu^2+$$
$$+\ldots+\left(\pi_n(t)+u_n(x)\right)\mu^n+\ldots,$$

$$t=x/\mu^q,\quad \varepsilon=\mu^{p+q}, \tag{1.3.4}$$

где $u_k(x)\in C^{(\infty)}[0,1],\quad \Pi_k(t)\in C^{(\infty)}[0,1/\mu]$.

Пример 2.3

$$\left(x+\varepsilon u(x)\right)u'(x)+\frac{p}{q}u(x)=x,\ u(1)=b, \tag{1.3.5}$$

Уравнение

$$\left(t+\pi_{-1}(t)\right)\pi'_{-1}(t)+\frac{p}{q}\pi_{-1}(t)=0\Rightarrow t=c_0\pi_{-1}^{q/p}(t)-\frac{q}{p+q}\pi_{-1}(t),$$

$$c_0=b^{q/p}+b^{\frac{p+q}{p}}\frac{q\mu^{\frac{p}{q}+1}}{p+q},\ \pi_{-1}(\mu_0)=b\mu^p.$$

Уравнение

$$xu'(x)+\frac{p}{q}u(x)=x,$$

имеет регулярное решение

$$u_0(x)=\frac{q}{p+q}x.$$

Уравнение для $\pi_0(t)$ имеет вид

$$\left(t+\pi_{-1}(t)\right)\pi_0'(t)+\left(\pi_{-1}'(t)+\frac{p}{q}\right)\pi_0(t)=-\frac{q}{p+q}\mu^q t\pi_{-1}'(t),$$

$$\pi_0\left(\mu\right)=0,\ \ \mu=1/\mu^q,\ p<q,$$

Решение этого уравнения представляется в виде

$$\pi_{-1}(t)=\frac{q}{(p+q)\left(t+\pi_{-1}(t)\right)}\int_t^{\mu} X(t)X^{-1}(s)\pi_{-1}'(s)\mu^2 s ds,$$

где

$$X(t)=\exp\left\{-\frac{p}{q}\int_t^{\mu}\frac{ds}{s+\pi_{-1}(s)}ds\right\}.$$

Отсюда следует, что $\left|\pi_{-1}(t)\right|\le\dfrac{q}{p+q}$.

Поэтому асимптотику решения задачи (1.3.5) можно записать в виде

$$u(x)=\frac{1}{\mu}\pi_{-1}(t)+\frac{q}{p+q}x+\pi_0(t)+O(\mu),\ \ x=\mu^q t,\ \ \varepsilon=\mu^{p+q}.$$

Теорема 2.4 Пусть выполнено условие У и $q_0=1$. Тогда, решение задачи (1.1.1) представляется в виде ряда

$$u(x)=\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+\pi_0(t)+u_0(x)+\left(\pi_1(t)+u_1(x)\right)\mu+\left(\pi_2(t)+u_2(x)\right)\mu^2+...+\left(\pi_n(t)+u_n(x)\right)\mu^n+...,$$
$$t=x/\mu,\quad \varepsilon=\mu^2, \tag{1.3.6}$$

где $u_k(x)\in C^{(\infty)}[0,1],\quad \Pi_k(t)\in C^{(\infty)}[0,1/\mu]$. Отметим, что $\pi_k(t)=\pi_k(t,\mu)$, т.е. $\pi_k(t)$ зависит также от μ, но эту зависимость мы для краткости не пишем.

Пример 2.4: Рассмотрим уравнение

$$\left(x+\varepsilon u(x)\right)u'(x)+u(x)=1,\quad u(1)=b, \tag{1.3.7}$$

Это уравнение интегрируется точно

$$u(x)=\varepsilon^{-1}\left[-x+\sqrt{x^2+2b_0\varepsilon+\varepsilon^2\left(u^{(0)}\right)^2+2\varepsilon x}\right],$$

где $b_0=b-1$. Если $b_0>0$, то решение задачи (1.3.7) существует на отрезке $[0,1]$, что подтверждается теоремой 2.

Уравнение для $\pi_{-1}(t)$ имеет вид

$$(t+\pi_{-1}(t))\pi'_{-1}(t)+\pi_{-1}(t)=0, \quad \pi_{-1}(1/\mu)=b\mu.$$

Решение этой задачи представляется в виде

$$\pi_{-1}(t)=-t+\sqrt{t^2+2b+b^2\mu^2},$$

Уравнение для $u_0(x)$ имеет решение $u_0(x)=1\in C^{(\infty)}[0,1]$. Далее

$$\pi_0(t)=\frac{-\pi_{-1}(t)+b\mu}{t+\pi_{-1}(t)}, \quad u_k(x)=0, \quad (k=1,2,...),$$

причем $b=b_0$. Асимптотика решений задачи (1.3.7) представляется в виде

$$u(x)=\frac{\pi_{-1}(x/\mu)}{\mu}+1+\pi_0(x/\mu)+o(\mu), \quad (\forall x\in[0,1]), \quad \mu\to 0.$$

Теорема 2.5 Пусть выполнено условие У и $q_0=m, m\in N$. Тогда, решение задачи (1.1.1) представляется в виде ряда

$$\begin{aligned} u(x)&=\mu^{-m}\pi_{-m}(t)+\mu^{-m+1}\pi_{-m+1}(t)+...+\mu^{-2}\pi_{-2}(t)+\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+\pi_0(t)+\\ &u_0(x)+(\pi_1(t)+u_1(x))\mu+(\pi_2(t)+u_2(x))\mu^2+...+(\pi_n(t)+u_n(x))\mu^n+..., \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

где $t=x/\mu, \quad \varepsilon=\mu^{m+1}, u_k(x)\in C^{(\infty)}[0,1], \quad \Pi_k(t)\in C^{(\infty)}[0,1/\mu]$.

Пример 2.5

$$(x+\varepsilon u(x))u'(x)+mu(x)=\beta x, \; u(1)=b. \tag{1.3.9}$$

Уравнение

$$(t+\pi_{-1}(t))\pi'_{-1}(t)+m\pi_{-1}(t)=0,$$

имеет решение вида

$$t=\frac{1}{m+1}\pi_{-1}(t)+c_0\pi_{-1}^{-1/m}(t), \quad c_0=b^{1/m}+b^{\frac{1+m}{m}}\frac{\mu^{m+1}}{1+m}, \quad \pi_{-1}(\mu_0)=b\mu^m.$$

А также уравнение

$$xu'(x)+mu(x)=\beta x,$$

имеет регулярное решение

$$u_0(x)=\frac{\beta}{1+m}x$$

Уравнение для $\pi_0(t)$ имеет вид

$$\left(t+\pi_{-1}\left(t\right)\right)\pi_0'\left(t\right)+\left(\pi_{-1}'\left(t\right)+m\right)\pi_0\left(t\right)=-m\mu^{m+1}t\pi_{-1}'\left(t\right),\ \pi_0\left(\overset{\square}{\mu}\right)=0,\ \overset{\square}{\mu}=1/\mu^{m+1}.$$

Решение этого уравнения представляется в виде

$$\pi_{-1}\left(t\right)=\frac{m}{\left(t+\pi_{-1}\left(t\right)\right)}\int_t^{\mu}X\left(t\right)X^{-1}\left(s\right)\pi_{-1}'\left(s\right)\mu^{m+1}sds,$$

где

$$X\left(t\right)=\exp\left\{-m\int_t^{\overset{\square}{\mu}}\frac{ds}{s+\pi_{-1}\left(s\right)}ds\right\}.$$

Отсюда следует, что $\left|\pi_{-1}\left(t\right)\right|\le m$.

Поэтому асимптотику решения задачи (1.3.9) можно записать в виде

$$u\left(x\right)=\frac{1}{\mu}\pi_{-1}\left(t\right)+\frac{\beta}{1+m}x+\pi_0\left(t\right)+O\left(\mu\right),\ x=\mu^m t,\ \varepsilon=\mu^{m+1}.$$

Теорема 2.6 Пусть выполнено условие У и $q_0=p/q,\ p,q\in N; p>q$. Тогда, решение задачи (1.1.1) представляется в виде ряда

$$\begin{aligned}u\left(x\right)=\mu^{-m}\pi_{-m}\left(t\right)+\mu^{-m+1}\pi_{-m+1}\left(t\right)+\ldots+\mu^{-2}\pi_{-2}\left(t\right)+\mu^{-1}\pi_{-1}\left(t\right)+\pi_0\left(t\right)+\\ u_0\left(x\right)+\left(\pi_1\left(t\right)+u_1\left(x\right)\right)\mu+\left(\pi_2\left(t\right)+u_2\left(x\right)\right)\mu^2+\ldots+\left(\pi_n\left(t\right)+u_n\left(x\right)\right)\mu^n+\ldots,\end{aligned}\tag{1.3.10}$$

где $t=x/\mu^q,\ \varepsilon=\mu^{p+q},\ u_k\left(x\right)\in C^{(\infty)}[0,1],\quad \Pi_k\left(t\right)\in C^{(\infty)}[0,1/\mu]$.

Пример 2.6

$$\left(x+\varepsilon u\left(x\right)\right)u'\left(x\right)+\frac{p}{q}u\left(x\right)=x,\ u\left(1\right)=b,\ p>q.\tag{1.3.11}$$

Уравнение

$$\left(t+\pi_{-1}\left(t\right)\right)\pi_{-1}'\left(t\right)+m\pi_{-1}\left(t\right)=0,$$

имеет решение вида

$$t=\frac{q}{p+q}\pi_{-1}\left(t\right)+c_0\pi_{-1}^{-q/p}\left(t\right),\ c_0=b^{q/p}+\frac{q}{p+q}b^q\mu^{\frac{q(p+q)}{p}},\ \pi_{-1}\left(\mu_0\right)=b\mu^p.$$

А также уравнение

$$xu'\left(x\right)+\frac{p}{q}u\left(x\right)=x,$$

имеет регулярное решение

$$u_0(x) = \frac{q}{p+q}x.$$

Уравнение для $\pi_0(t)$ имеет вид

$$\left(t+\pi_{-1}(t)\right)\pi_0'(t)+\left(\pi_{-1}'(t)+\frac{p}{q}\right)\pi_0(t)=-\frac{q}{p+q}\mu^q t\pi_{-1}'(t),\ \pi_0\left(\mu\right)=0,\ \mu=1/\mu^q,\ p>q.$$

Решение этого уравнения представляется в виде

$$\pi_{-1}(t)=\frac{q}{(p+q)\left(t+\pi_{-1}(t)\right)}\int_t^{\mu} X(t)X^{-1}(s)\pi_{-1}'(s)\mu^2 sds,$$

где

$$X(t)=\exp\left\{-\frac{p}{q}\int_t^{\mu}\frac{ds}{s+\pi_{-1}(s)}ds\right\}.$$

Отсюда следует, что $\left|\pi_{-1}(t)\right|\le\frac{q}{p+q}$.

Поэтому асимптотику решения задачи (1.3.11) можно записать в виде

$$u(x)=\frac{1}{\mu}\pi_{-1}(t)+\frac{q}{p+q}x+\pi_0(t)+O(\mu),\ x=\mu^q t,\ \varepsilon=\mu^{p+q}.$$

В третьей главе разработан новый асимптотический метод Пуанкаре для сингулярно возмущенной задачи Лайтхилла с регулярной особой точкой.

Доказаны следующие теоремы

Теорема 3.1 Пусть выполнено условие У и $q_0=1,\ a>0$. Тогда, решение задачи (1.1.1) представляется в виде обобщенного асимптотического ряда Пуанкаре

$$u(x)=\frac{1}{\mu}\left[u_0\left(\frac{x}{\mu}\right)+\mu u_1\left(\frac{x}{\mu}\right)+\ldots+\mu^n u_n\left(\frac{x}{\mu}\right)+\mu^{n+1}R_n\left(\frac{x}{\mu}\right)\right], \tag{1.3.12}$$

где $R_n\left(x/\mu,\mu\right)=\hat{I}\ (1),\ \forall t\in\left[0,\mu\right]$.

Пример 3.1

$$\left(x+\varepsilon y(x)\right)y'(x)+y(x)=1,\ u(0)=a\neq 0, \tag{1.3.13}$$

Имеет точное решение

$$y(x)=\frac{1}{\varepsilon}\left[-x\pm\sqrt{x^2+\varepsilon^2a^2+2\varepsilon x}\right].$$

Знак + (-) соответствует значению $a>0\ (a<0)$.

Если сделать постановку $x=\mu t$, то

$$y(\mu t)=\frac{1}{\mu}\left[-t\pm\sqrt{t^2+\mu^2a^2+2\mu t}\right]. \tag{1.3.14}$$

Решение задачи (1.3.13) имеет вид

$$y(x,\varepsilon)=\frac{1}{\mu}\left[-t+\sqrt{t^2+\mu^2}+\frac{\mu t}{\sqrt{t^2+\mu^2a^2}}-\frac{\mu^2 t}{2\sqrt{\left(t^2+\mu^2a^2\right)^3}}+O\left(\mu^3\right)\right]. \tag{1.3.15}$$

Теорема 3.2 Пусть выполнено условие У и $q_0=m,\ m\in N$. Тогда, решение задачи (1.1.1) представляется в виде обобщенного асимптотического ряда Пуанкаре

$$u(x)=\frac{1}{\mu^m}\left[u_0\left(\frac{x}{\mu}\right)+\mu u_1\left(\frac{x}{\mu}\right)+\ldots+\mu^n u_n\left(\frac{x}{\mu}\right)+\mu^{n+1}R_n\left(\frac{x}{\mu}\right)\right], \tag{1.3.16}$$

где $R_n\left(x/\mu,\mu\right)=\hat{I}\ (1),\forall t\in\left[0,\overset{\square}{\mu}\right],\varepsilon^{m+1}=\mu\ \forall t\in\left[0,\overset{\square}{\mu}\right].$

Пример 3.2

$$\left(x+\varepsilon u(x)\right)u'(x)+mu(x)=\beta x,\ u(0)=a>0,\ \beta\in R. \tag{1.3.17}$$

Решение этой задачи запишется в виде

$$y(x)=\frac{1}{\mu^m}\left[z_0(t)+\mu^n z_n(t)+O\left(\mu^{m+1}\right)\right],\ x=\mu t,\ \varepsilon=\mu^{m+1},$$

где $z_0(t)$ определяется неявно из соотношения

$$t=c_0z_0^{-1/m}-\frac{1}{1+m}z_0,\ c_0=\alpha\mu^{1+m},\ \alpha=\frac{1}{1+m}a^{1+\frac{1}{m}}.$$

Причем $\left|z_m(t)\right|\le l.$

Теорема 3.3 Пусть выполнено условие У и $q_0=p/q,\ p,q\in N,\ p>q,\ a>0$. Тогда, решение задачи (1.1.1) представляется в виде обобщенного асимптотического ряда Пуанкаре

$$u(x)=\frac{1}{\mu^{p+q}}\left[u_0\left(\frac{x}{\mu}\right)+\mu u_1\left(\frac{x}{\mu}\right)+\ldots+\mu^n u_n\left(\frac{x}{\mu}\right)+\mu^{n+1}R_n\left(\frac{x}{\mu}\right)\right], \tag{1.3.18}$$

где $R_n\left(x/\mu,\mu\right)=O(1),\forall t\in\left[0,\overset{\square}{\mu}\right],\varepsilon^{p+q}=\mu\ \forall t\in\left[0,\overset{\square}{\mu}\right].$

Пример 3.3

$$\left(x+\varepsilon u\left(x\right)\right)u'\left(x\right)+\frac{p}{q}u\left(x\right)=\beta x,\ u\left(0\right)=a>0,\ \ \beta\in R,\ \ p>q,\ \ p,q\in N. \qquad (1.3.19)$$

Решение этой задачи запишется в виде

$$y\left(x\right)=\frac{1}{\mu^{p+q}}\left[z_0\left(t\right)+\mu^{p+q}\,z_{p+q}\left(t\right)+O\left(\mu^{p+q+1}\right)\right],\ x=\mu t,\ \ \varepsilon=\mu^{p+q+1},$$

где $z_0\left(t\right)$ определяется неявно из соотношения

$$t=c_0\,z_0^{-q/\,p+q}-\frac{q}{p+q}z_0,\ c_0=\alpha\,\mu^{1+p+q},\ \alpha=\frac{q}{p+q}a^{1+\frac{q}{p}}.$$

Причем $\left|z_{p+q}\left(t\right)\right|\le l.$

ГЛАВА 2. МЕТОД ПОГРАНФУНКЦИЙ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАЙТХИЛЛА ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

§2.1 Случай, когда решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет логарифмический рост в регулярной особой точке

Здесь рассматривается уравнение (1.1.1) записанное в виде

$$\left(x+\varepsilon u(x)\right)\frac{du(x)}{dx}=-xq(x)u(x)+r(x),\ \ u(1)=b, \tag{2.1.1}$$

Пусть выполнено следующее условие У 2.1: $q(x),\ r(x)\in C^{(\infty)}[0,1]$, $r_0=r(0)\neq 0$. Решение невозмущенной задачи (1.1.1)

$$Lu_0(x):=u_0'(x)+q(x)u_0(x)=x^{-1}\quad r(x),\quad u(1)=b,$$

запишется в виде

$$u_0(x)=P(x)\left[a+\int_1^x R(s)\quad s^{-1}ds\right]=\left|\begin{array}{c}P(x)=\exp\left\{-\int_1^x q(s)ds\right\}\in C^{(\infty)}[0,1],\\ R(x)=P^{-1}(x)r(x)\in C^{(\infty)}[0,1]\end{array}\right|=$$

$$=P(x)\left[a+\int_1^0(R(s)-R(0))s^{-1}ds+\int_0^x\left(R(s)-R(0)\right)s^{-1}ds+R_0\ln x\right]=$$

$$=\left|R_0=R(0)=r_0,\quad P_0(x)=P(x)R_0\ln x,\quad P_0(x)=b+\int_1^x\left(R(s)-R(0)\right)s^{-1}ds\in C^{(\infty)}[0,1]\right|.$$

т.о.

$$u_0(x)=P_0(x)+R_0P(x)\ln x\sim r_0\ln x,\ \left(a_0=R_0P_0\right),\ \ x\to 0, \tag{2.1.2}$$

$$u_0'(x)\sim r_0x^{-1}. \tag{2.1.3}$$

Выясним структуру внешнего решения задачи (2.1.1) при $x\to 0$. Его ищем в виде

$$u(x)=u_0(x)+\varepsilon u_1(x)+\varepsilon^2u_2(x)+\ldots+\varepsilon^n u_n(x)+\ldots. \tag{2.1.4}$$

Уравнение для определения $u_1(x)$ можно записать в виде

$$Lu_1(x)=u_0(x)u_0'(x)x^{-1}\sim r_0^2x^{-2}\ln x,\ \ x\to 0.$$

Отсюда, получим

$$u_1(x)\sim r_0^2x^{-1}\ln x,\ \ x\to 0,$$

$$u_1'(x)\sim -r_0^2x^{-2}\ln x,\ \ x\to 0.$$

Уравнение для определения $u_2(x)$ можно записать в виде

$$Lu_2(x)=-x^{-1}\left(u_0(x)u_1'(x)+u_0'(x)u_1(x)\right)\sim r_0^3x^{-3}\ln^2 x-r_0^3x^{-3}\ln x\cong r_0^3x^{-3}\ln^2 x,\ \ x\to 0.$$

Отсюда, получим

$$u_2(x)\sim \frac{1}{2}r_0^3x^{-2}\ln^2 x,\ \ x\to 0,$$

$$u_2'(x)\sim -r_0^3x^{-3}\ln^2 x,\ \ x\to 0.$$

Используя эти ассиметрики функций $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$ для определения $u_3(x)$ имеем уравнение

$$Lu_3(x) \sim r_0^4 x^{-4}\ln^3 x,\ \ x\to 0.$$

Отсюда, получим

$$u_3(x) \sim -\frac{1}{3} r_0^4 x^{-3}\ln^3 x,\ \ x\to 0,$$

$$u_3'(x) \sim r_0^4 x^{-4}\ln^3 x,\ \ x\to 0.$$

Аналогично, методом математической индукции получим

$$u_n(x) \sim \frac{(-1)^n}{n} r_0^{n+1} x^{-n}\ln^n x,\ \ x\to 0, \qquad (2.1.5_n)$$

$$u_3'(x) \sim (-1)^{n+1} r_0^{n+1} x^{-n-1}\ln^n x,\ \ x\to 0. \qquad (2.1.5_{n+1})$$

Таким образом, главная асимптотика внешнего решения имеет вид

$$u(x) \sim -r_0\ln x^{-1} + r_0^2\frac{\varepsilon\ln x^{-1}}{x} + (-1)^3 r_0\left(r_0\frac{\varepsilon\ln x^{-1}}{x}\right)^2 +$$

$$+\ldots+(-1)^{n+1} r_0\left(r_0\frac{\varepsilon\ln x^{-1}}{x}\right)^n+\ldots,\ \ x\to 0. \qquad (2.1.6)$$

Из этого выражения видно, что решение является асимптотическим рядом на отрезке $(x_0,1]$, где $x_0=x_0(\varepsilon)$ решение уравнения

$$\frac{\alpha\varepsilon\ \ln x_0^{-1}}{x_0}=1,\ \ \alpha=-r_0,\ \ r_0<0. \qquad (2.1.7)$$

Асимптотику решения алгебраического уравнения (2.1.7) можно записать в виде

$$x_0 \sim \alpha\varepsilon\ln\frac{1}{\alpha\varepsilon},\ (\varepsilon\to 0). \qquad (2.1.8)$$

Таким образом, нами формально была доказана следующая

Теорема 1.1. Пусть выполнено условие У 2.1: $q(x),\ r(x)\in C^{(\infty)}[0,1]$, $r_0=r(0)\neq 0$. Тогда решение задачи (2.1.1) представимо в виде асимптотического ряда (2.1.4), на отрезке $(x_0,1]$.

Доказательство приведем методом мажорант.

Уравнение (2.1.1) запишем в виде

$$xu'(x)=q(x)u(x)+r(x)-\varepsilon u(x)u'(x),\quad u(1)=b.$$

Отсюда переходим в интегральное уравнение используя (2.1.2)

$$u(x)=P_0(x)+R_0(x)\ln x-\varepsilon\int_1^x P(x)\ \ P^{-1}(s)\ \ s^{-1}u_0(s)u_0'(s)ds.$$

Интегрируя интегральный член по частям, отсюда получим

$$u(x)=P_0(x)+R_0(x)P(x)\ln x-\varepsilon\frac{x^{-1}u^2(x)}{2}+\varepsilon lP^{-1}(x)+\varepsilon P(x)\int_1^x a_0(s)\ \ s^{-2}u^2(s)ds, \qquad (2.1.9)$$

где $l=\dfrac{P^{-1}(1)a^2}{2}$, $\ a_0(x)=P^{-1}(x)-P^{-2}(x)P'(x)x,$

далее обозначим все постоянные не зависящие от ε через l. Оценивая уравнение (2.1.9) имеем мажорантное уравнение

$$z(x) = -l\ln x + \frac{\varepsilon}{x} l z^2(x), \qquad (2.1.10)$$

где $z(x) = \max_{[x,1]}|u(x)|$. Положительное решение этого уравнения можно представить в виде

$$z(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\left[\frac{x}{2\varepsilon} - \sqrt{\left(\frac{x}{4\varepsilon}\right)^2 + 4\varepsilon x \ln x}\right]. \qquad (2.1.11)$$

Это уравнение имеет положительное решение $\alpha\varepsilon\, l\frac{\ln x^{-1}}{x} < \frac{1}{4}$

Теорема доказана. Решение уравнение (2.1.11) разлагается по степеням $\varepsilon\frac{\ln x}{x}$.

Чтобы получить равномерную асимптотику задачи (2.1.1) применим идею метода погранфункций и решение ищем в виде

$$u(x) = x_0^{-1}\pi_{-1}(t) + \pi_0(t) + u_0(x) + \left(\pi_1(t) + u_1(x)\right)x_0 + \left(\pi_2(t) + u_2(x)\right)x_0^2 + $$
$$+ \ldots + \left(\pi_n(t) + u_n(x)\right)x_0^n + \ldots, \qquad (2.1.12)$$

где

$$1 = \ln\frac{1}{x_0}\alpha\varepsilon x_0^{-1},\ x_0 \sim \alpha\varepsilon\ln\frac{1}{\alpha\varepsilon},\ 0 < \varepsilon < x_0 < \mu,\ \frac{1}{\ln\frac{1}{\alpha\varepsilon}} = \mu,\ x = \mu t,\ \alpha = -r_0 > 0, \qquad (2.1.13)$$

$u_j(x) \in C^{(\infty)}[0,1].$

Начальные условия для $\pi_k(t)(k = -1, 0, 1, 2, \ldots)$ и $u_s(x)$ берем в виде

$$\pi_{-1}\left(\mu^{-1}\right) = -x_0\mu^{-1}\alpha,\ \pi_s\left(\mu^{-1}\right) = 0,\ u_0(1) = b - r_0,\ u_{s+1}(1) = 0,\ (s = 0,1,2,\ldots) \qquad (2.1.14)$$

Подставив (2.1.10) в (2.1.1)

$$\left[x + \varepsilon\left(x_0^{-1}\pi_{-1}(t) + \pi_0(t) + u_0(x) + x_0\left(\pi_1(t) + u_1(x)\right) + \ldots + x_0^n\left(\pi_n(t) + u_n(x)\right)\right) + \ldots\right]\times$$
$$\times\left[\left(\mu x_0\right)^{-1}\pi'_{-1}(t) + x_0^{-1}\pi'_0(t) + u'_0(x) + \mu x_0^{-1}\pi'_1(t) + \mu u'_0(x) + \ldots + \mu^n\left(x_0^{-1}\pi'_n(t) + u'_n(x)\right)\right] +$$
$$+ xq(x)\left(x_0^{-1}\pi_{-1}(t) + \pi_0(t) + u_0(x) + x_0\left(\pi_1(t) + u_1(x)\right) + \ldots + x_0^n\left(\pi_n(t) + u_n(x)\right) + \ldots\right) = r(x)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, имеем

$$\left(t + \pi_{-1}(t)\right)\pi'_{-1}(t) + x_0 t\, q(\mu t)\pi_{-1}(t) = r_0 x_0,\ \pi_{-1}\left(\mu^{-1}\right) = \alpha x_0\mu^{-1}, \qquad (2.1.15_{-1})$$

$$M\pi_0(t) := \left(t + \pi_{-1}(t)\right)\pi'_0(t) + \pi'_{-1}(t)\pi_0(t) + \mu t q(\mu t)\pi_0(t) = r_0,\ \pi_0\left(\mu^{-1}\right) = 0, \qquad (2.1.15_0)$$

$$Ku_0(x) := xu'_0(x) + xq(x)u_0(x) = \left(r(x) - r_0\right)x_0,\quad u_0(1) = b, \qquad (2.1.16_0)$$

$$M\pi_1(t) := -\pi_0(t)\pi'_0(t) - x_0 u_0(0)u'_0(0),\ \pi_1\left(\mu^{-1}\right) = 0, \qquad (2.1.15_1)$$

$$Ku_1(x) := -x_0 u_0(x) u_0'(x) + x_0 u_0(0) u_0'(0), \quad u_1(0) = 0, \tag{2.1.16$_1$}$$

$$M\pi_2(t) := -\pi_0(t)\pi_1'(t) - \pi_0'(t)\pi_1(t) - x_0 u_0(0) u_1'(0) - x_0 u_1(0) u_0'(0), \\ \pi_2(\mu^{-1}) = 0, \tag{2.1.15$_2$}$$

$$Ku_2(x) := -x_0 u_0(x) u_1'(x) - x_0 u_1(0) u_0'(0) + x_0 u_0(0) u_1'(0) + x_0 u_1(0) u_0'(0), \\ u_2(0) = 0, \tag{2.1.16$_2$}$$

. . . .

$$M\pi_m(t) := -\sum_{\substack{i+j=m+1 \\ i,j\geq 0}} \pi_i(t)\pi_j'(t), \; \pi_m(\mu^{-1}) = 0, \tag{2.1.15$_m$}$$

$$Ku_m(x) := -x_0 \sum_{\substack{i+j=m+1 \\ i,j\geq 0}} u_0(x) u_1'(x) + x_0 \sum_{\substack{i+j=m+1 \\ i,j\geq 0}} u_i(0) u_j'(x), \quad u_m(0) = 0, \tag{2.1.16$_m$}$$

. . . .

Сначала докажем существования решения задачи (2.1.15$_{-1}$). Решение этой задачи представляется в виде

$$\pi_{-1}(t) = x_0\alpha \frac{1}{\mu} + x_0\alpha \int_t^{\mu} X(t) X^{-1}(s) \frac{ds}{s + \pi_{-1}(s)} := T(\pi_{-1}), \tag{2.1.17}$$

где $X(t, \pi_{-1}) = \exp\left\{ \int_t^{\mu} \frac{x_0 \tau q(\mu t)}{\tau + \pi_{-1}(\tau)} d\tau \right\}, \; \alpha = -r_0 > 0.$

Пусть $\|X(t)\| = \sup_{[0,\mu]} |X(0)|$. Если $|q(\mu t)| \leq l$, тогда $\|X(t)\|, \|X^{-1}(t)\| \leq l_1$, $\left(l_1 = \exp\{x_0 \mu^{-1} l\} \right)$

Рассмотрим множество функций S удовлетворяющих оценке

$$\mu|r_0| l_1 \leq \|\pi_{-1}(t)\| \leq \mu |r_0| l_1 + x_0 l_0 |r_0| l_1^2 \ln\frac{2}{\mu}. \tag{2.1.18}$$

Очевидно, что оператор T отображает S в себя. Докажем, что T является сжимающимся в нем. Действительно, имеем

$$\left| T\left[\pi_{-1}^{(1)}\right] - T\left[\pi_{-1}^{(2)}\right] \right| \leq x_0 |r_0| \left| \int_t^{\mu} \left[\frac{X\left(t, \pi_{-1}^{(1)}\right) X^{-1}\left(t, \pi_{-1}^{(1)}\right)}{s + \pi_{-1}^{(1)}(s)} - \frac{X\left(t, \pi_{-1}^{(2)}\right) X^{-1}\left(t, \pi_{-1}^{(2)}\right)}{s + \pi_{-1}^{(2)}(s)} \right] ds \right| =$$

$$
= x_0 |r_0| \left| \int_t^{\mu} \left[X\left(t, \pi_{-1}^{(1)}\right) X^{-1}\left(t, \pi_{-1}^{(1)}\right) \left(\frac{1}{s + \pi_{-1}^{(1)}(s)} - \frac{1}{s + \pi_{-1}^{(2)}(s)} \right) + \frac{F\left[\pi_{-1}^{(1)}\right] - F\left[\pi_{-1}^{(2)}\right]}{s + \pi_{-1}^{(2)}(s)} \right] ds \right| \le
$$

$$
\overset{(2.1.18.)}{\le} x_0 |r_0| l_1^2 \left| \int_t^{\mu} \left(\frac{\left|\pi_{-1}^{(1)}(s) - \pi_{-1}^{(2)}(s)\right|}{\left(s + \pi_{-1}^{(1)}(s)\right)\left(s + \pi_{-1}^{(2)}(s)\right)} \right) ds \right| + x_0 |r_0| \left| \int_t^{\mu} \left(\frac{\left|\pi_{-1}^{(1)}(s) - \pi_{-1}^{(2)}(s)\right|}{s + \pi_{-1}^{(2)}(s)} \right) ds \right|.
$$

Чтобы оценить вторую сумму мы рассмотрим функционал

$$
F\left(\pi_{-1}\right) = \exp\left\{ \int_s^t \frac{x_0 \tau q(\mu t)}{\tau + \pi_{-1}(\tau)} d\tau \right\}.
$$

Производная Фреше этого функционала есть

$$
F'\left(\pi_{-1}\right) = -X(t) \int_s^t \frac{x_0 \tau q(\mu t)}{\left(\tau + \pi_{-1}(\tau)\right)^2} d\tau.
$$

Оценивая ее в множестве S имеем

$$
\left|F'\left(\pi_{-1}\right)\right| \le l x_0 \int_s^t \frac{x_0 \tau l}{\left(\tau + \pi_{-1}(\tau)\right)^2} d\tau \le l \left(-\frac{x_0}{\tau + \pi_{-1}(\tau)} \right) \Bigg|_s^t = l \frac{1}{s + \pi_{-1}(s)} \le \frac{l\, x_0}{s + |r_0| l_1 \mu} \le 1.
$$

Поэтому применяя теорему о среднем при малом ε для функционала F, получим последнюю оценку

$$
\begin{aligned}
&\left|T\left[\pi_{-1}^{(1)}\right] - T\left[\pi_{-1}^{(2)}\right]\right| \le \left\|\pi_{-1}^{(1)} - \pi_{-1}^{(2)}\right\| \times \\
&\times \left[x_0 |r_0| l_1^2 \int_t^{\mu} \frac{ds}{\left(s + \pi_{-1}^{(1)}(s)\right)\left(s + \pi_{-1}^{(2)}(s)\right)} + x_0 |r_0| \int_t^{\mu} \frac{ds}{s + \pi_{-1}^{(2)}(s)} \right] \le \\
&\le \gamma \left\|\pi_{-1}^{(1)} - \pi_{-1}^{(2)}\right\|
\end{aligned}
\qquad (2.1.19)
$$

Поэтому в силу (2.1.19) уравнение (2.1.17) имеет единственное решение в множестве S и имеет место оценка (2.1.18).

Чтобы решить задачи ($2.1.15_k$),($2.1.16_k$) нужны следующие леммы.

Лемма 1. Фундаментальное решение однородного уравнения ($\Phi\left(x_0^{-1}\right) = 1$):

$$
M \pi_0(t) = 0, \qquad (2.1.20)
$$

имеет вид

$$
\eta(t) = \frac{x_0^{-1} + x_0 a}{t + \pi_{-1}(t)} \Phi(t), \qquad (2.1.21)
$$

где

$$\Phi(t)=\exp\left\{-\int_t^{x_0}\frac{1-x_0sq(x_0s)}{s+\pi_{-1}(s)}ds\right\},$$

причем $\|\Phi(t)\|\le l.$

Доказательство. Имеем

$$\eta(t)=\exp\left\{+\int_t^{x_0^{-1}}\frac{x_0sq(x_0s)+\pi'_{-1}(s)}{s+\pi_{-1}(s)}ds\right\}=\exp\left\{+\int_t^{x_0^{-1}}\frac{1+\pi'_{-1}(s)}{s+\pi_{-1}(s)}ds\right\}\exp\left\{-\int_t^{x_0^{-1}}\frac{1-x_0sq(x_0s)}{s+\pi_{-1}(s)}ds\right\}.$$

Ограниченность нормы $\Phi(t)$ следует из того, что

$$\int_t^{x_0^{-1}}\frac{ds}{s+\pi_{-1}(s)}\ge 0,\ \int_t^{x_0^{-1}}\frac{x_0s|q(x_0s)|ds}{s+\pi_{-1}(s)}\le x_0l\int_t^{x_0^{-1}}\frac{sds}{s+|a|x_0}\le l.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Задача

$$K\quad \xi(x):=x\xi'(x)+xq(x)\xi=f(x)-f(0),\quad \xi(1)=0. \qquad (2.1.22)$$

где $f(x)\in C^{(\infty)}[0,1]$ имеет единственное решение из класса $C^{(\infty)}[0,1]$.

Доказательство очевидно. (2.1.22) имеет решение $\xi(x)=\int_1^x P(x)P'(s)\big(f(s)-f(0)\big)s^{-1}ds.$

Лемма 3. Неоднородная задача

$$M\zeta(t)=g(t),\quad \zeta\left(x_0^{-1}\right)=0, \qquad (2.1.23)$$

где $g(t)$ – ограниченная непрерывная функция на отрезке $\left[0,x_0^{-1}\right]$, имеет единственное ограниченное решение.

Доказательство. Решение задачи (2.1.23) в силу леммы 1 представляется в виде

$$\zeta(t)=\frac{1}{t+\pi_{-1}(t)}\int_{x_0^{-1}}^t\Phi(t)\Phi'(s)g(s)ds=-\frac{1}{t+\pi_{-1}(t)}\int_t^{x_0^{-1}}\exp\left\{\int_s^t\frac{1-q(x_0\tau)x_0}{\tau+\pi_{-1}(\tau)}d\tau\right\}g(s)ds.$$

Отсюда, оценивая это выражение, имеем:

$$|\zeta(t)|\le\frac{lt}{t+\pi_{-1}(t)}\le l\ .$$

Из лемм 1 и 3 получим, что все функции $\pi_k(t),\ (k=0,1,...)$ имеют единственные ограниченные решения. А из леммы 2 следует, что все функции имеют единственные ограниченные решения из $C^{(\infty)}[0,1]$.

Далее применяя лемму 3, получим следующую теорему.

Теорема 2.1. Пусть выполнено условие У 2.1 $r_0 < 0$. Тогда решение задачи (1.1.1) представимо в виде асимптотического ряда (2.1.12), т.е.

$$u(x) = \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + \pi_0(t) + u_0(x) + (\pi_1(t) + u_1(x))\mu + (\pi_2(t) + u_2(x))\mu^2 + \\ + ... + (\pi_n(t) + u_n(x))\mu^n + R_{n+1}(x,\mu)\mu^{n+1},$$

где $|R_n(x,\mu)| \le l, \forall x \in [0,1]$.

Пример 2.1

$$(x + \varepsilon u(x))u'(x) = r_0,\ u(1) = b. \tag{2.1.25}$$

Явное представление этой задачи не существует. Однако параметрическое представление можно получить методом униформизации (см. 1.1.15).

$$\begin{aligned} &\xi \frac{du}{d\xi} = r_0,\ u(1) = b, \\ &\xi \frac{dx}{d\xi} = x + \varepsilon u(\xi),\ x(1) = 1. \end{aligned} \tag{2.1.26}$$

Решая задачу (2.1.26) имеем

$$u(\xi) = -\beta \ln \xi + b,\ x(\xi) = \xi\left[1 + \varepsilon(b - r_0)\right] + \varepsilon(\beta - b) + \varepsilon r_0 \ln \xi. \tag{2.1.27}$$

Это решение существует на отрезке $[\eta,\ 1]$, где η положительный корень уравнения

$$\eta\left[1 + \varepsilon(b - \beta)\right] - \varepsilon(b - r_0) + \varepsilon r_0 \ln \eta = 0.$$

Отсюда,

$$\eta \sim \varepsilon\beta \ln \frac{1}{\varepsilon\beta},\ \varepsilon \to 0,\ (\beta = -r_0 > 0).$$

Таким образом, в точке $x = 0$

$$u(0) \sim \beta \ln\left(\varepsilon\beta \ln \frac{1}{\varepsilon\beta}\right),\ \varepsilon \to 0. \tag{2.1.28}$$

Теперь решая задачу (2.1.25) обобщенным методом погранфункций, получим

$$u(x) = x_0^{-1}\pi_{-1}(t) + b + r_0 + O(x_0),\ \varepsilon \to 0, \tag{2.1.29}$$

где $\pi_{-1}(t)$ решение уравнения

$$\left(t + \pi_{-1}(t)\right)\pi'_{-1}(t) = r_0 x_0,\ \pi_{-1}\left(\mu^{-1}\right) = 0,$$

и решение этого уравнения представляется в виде

$$\pi_{-1}(t) = \beta x_0 \int_t^{1/\mu} \frac{ds}{s + \pi_{-1}(s)}, \tag{2.1.30}$$

и его можно искать методом последовательных приближений, с начальным приближением $\pi_{-1}^{(0)}(t) = \beta x_0$.

§ 2.2 Случай, когда решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет полюс порядка одна вторая решения невозмущенного уравнения

Пусть для уравнения (1.1.1) выполнено следующее условие У 2.2: $q(x),\ r(x) \in C^{(\infty)}[0,1],\ q_0 = 1/2$.

Решение невозмущенной задачи (1.1.2) представляется в виде:

$$u_0(x) = x^{-1/2} w(x), \tag{2.2.1}$$

где

$$P(x) = \exp\{\int_1^x \left(\frac{1}{2} - q(s)\right) s^{-1} ds\} \in \mathrm{C}^{\omega}[0,1],$$

$$w(x) = P(x)[w_0 + \int_0^x s^{-\frac{1}{2}} P^{-1}(s)\, r(s) ds] \in \mathrm{C}^{\omega}[0,1],$$

$$A = \int_0^1 P^{-1}(s) s^{-\frac{1}{2}}\, r(s) ds,\ w_0 = (b - A) P(0).$$

Решение задачи (1.1.1) ищется в виде

$$\begin{gathered} u(x,\mu) = \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + \pi_0(t) + u_0(x) + \left(\pi_1(t) + u_1(x)\right)\mu + \left(\pi_2(t) + u_2(x)\right)\mu^2 + \\ + \ldots + \left(\pi_n(t) + u_n(x)\right)\mu^n + \ldots, \end{gathered} \tag{2.2.2}$$

где $t = x/\mu^2,\ \varepsilon = \mu^3,\ u_k(x) \in C^{(\infty)}[0,1],\ \pi_k(t) \in C^{(\infty)}[0,\mu_0],\ \mu_0 = 1/\mu.$

Отметим, что функции $\pi_k(t) = \pi_k(t,\mu)$, т.е. является функцией двух переменных t и μ, но зависимость от μ не указываем. Это видно из уравнений, из которых определяются функции $\pi_k(t)$. Начальные условия для функций $\pi_j(t)$ берем в виде

$$\pi_{-1}(\mu_0)=\mu b,\ b=u^{(0)}-u_0(1)-\mu u_1(1)-\mu^2u_2(1)-\ldots-\mu^n u_n(1)-\ldots,$$

Подставляя (2.2.2) в (2.2.1) имеем

$$\left[\mu^2(t+\pi_{-1}(t))+\mu^3(\pi_0(t)+u_0(x))+\mu^4(\pi_1(t)+u_1(x))+\ldots+\mu^{n+3}(\pi_n(t)+u_n(x))+\ldots\right]\times$$

$$\times\left[\mu^{-3}\pi'_{-1}(t)+\mu^{-2}\pi'_0(t)+\mu^{-1}\pi'_1(t)+u'_0(x)+\pi'_2(t)+\mu(u'_1(x)+\pi'_3(t))+\mu^2(u'_2(x)+\pi'_4(t))+\ldots\right]+$$

$$+(1/2)\left(\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+\pi_0(t)+u_0(x)+\mu(\pi_1(t)+u_1(x))+\ldots+\mu^n(\pi_n(t)+u_n(x))\right)=r(x)$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ получим:

$$(t+\pi_{-1}(t))\pi'_{-1}(t)+\frac{1}{2}\pi_{-1}(t)=0,\quad \pi_{-1}(\mu_0)=b\mu, \tag{2.2.3-1}$$

$$Lu_0(x):=xu_0{}'+\frac{1}{2}u_0(x)=r(x), \tag{2.2.4$_0$}$$

$$D\pi_0(t):=(t+\pi_{-1}(t))\pi'_0(t)+\pi'_{-1}(t)\left(\pi_0(t)+u_0(t\mu^2)\right)+\frac{1}{2}\pi_0(t),$$
$$\pi_0(\mu_0)=0, \tag{2.2.5$_0$}$$

$$Lu_1(x):=0, \tag{2.2.4$_1$}$$

$$D\pi_1(t):=(t+\pi_{-1}(t))\pi'_1(t)+\pi'_0(t)\left(\pi_0(t)+u_0(t\mu^2)\right)+\pi'_{-1}(t)\left(\pi_1(t)+u_1(t\mu^2)\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\pi_1(t),\qquad \pi_1(\mu_0)=0, \tag{2.2.5$_1$}$$

$$Lu_2(x):=0, \tag{2.2.4$_2$}$$

$$D\pi_2(t):=(t+\pi_{-1}(t))\pi'_2(t)+\pi'_1(t)\left(\pi_0(t)+u_0(t\mu^2)\right)+\pi'_0(t)\left(\pi_1(t)+u_1(t\mu^2)\right)+$$
$$+\pi'_{-1}(t)\left(\pi_2(t)+u_2(t\mu^2)\right)+u'_0(t\mu^2)(t+\pi_{-1}(t))+\frac{1}{2}\pi_2(t),\qquad \pi_2(\mu_0)=0, \tag{2.2.5$_2$}$$

$$Lu_3(x):=0, \tag{2.2.4$_3$}$$

$$D\pi_3(t):=\sum_{\substack{i+j=2\\ -1\le i\le 2,\ j\ge -1}}\pi_i(t)\pi'_j(t)+\sum_{\substack{i+j=2\\ 0\le i\le 2,\ j\ge -1}}u_i(t\mu^2)\pi'_j(t)+t\pi'_3(t)+\frac{1}{2}\pi_3(t),$$
$$\pi_3(\mu_0)=0, \tag{2.2.5$_3$}$$

$$Lu_4(x):=0, \tag{2.2.4$_4$}$$

$$D\pi_4(t):=\sum_{\substack{i+j=3\\ -1\le i\le 3,\ j\ge -1}}\pi_i(t)\pi'_j(t)+\sum_{\substack{i+j=3\\ 0\le i\le 3,\ j\ge -1}}u_i(t\mu^2)\pi'_j(t)+t\pi'_4(t)+\frac{1}{2}\pi_4(t),$$
$$\pi_4(\mu_0)=0, \tag{2.2.5$_4$}$$

$$Lu_5(x):=0, \tag{2.2.4$_5$}$$

$$D\pi_5(t) := \sum_{\substack{i+j=4\\ i,j\ge -1}} \pi_i(t)\pi_j'(t) + \sum_{\substack{i+j=4\\ i\ge 0,\, j\ge -1}} u_i\left(t\mu^2\right)\pi_j'(t) + t\pi_5'(t) + \frac{1}{2}\pi_5(t),$$

$$\pi_5(\mu_0) = 0, \tag{2.2.5$_5$}$$

$$Lu_6(x) := 0, \tag{2.2.4$_6$}$$

$$D\pi_6(t) := \sum_{\substack{i+j=5\\ i,j\ge -1}} \pi_i(t)\pi_j'(t) + \sum_{\substack{i+j=5\\ i\ge 0,\, j\ge -1}} u_i\left(t\mu^2\right)\pi_j'(t) + t\pi_6'(t) + \frac{1}{2}\pi_6(t),$$

$$\pi_6(\mu_0) = 0, \tag{2.2.5$_6$}$$

…………………………………………………………………………

$$Lu_{m-1}(x) := 0, \tag{2.2.4$_{m-1}$}$$

$$D\pi_{m-1}(t) := \sum_{\substack{i+j=m-2\\ i,j\ge -1}} \pi_i(t)\pi_j'(t) + \sum_{\substack{i+j=m-2\\ i\ge 0,\, j\ge -1}} u_i\left(t\mu^2\right)\pi_j'(t) + t\pi_{m-1}'(t) + \frac{1}{2}\pi_{m-1}(t),$$

$$\pi_{m-1}(\mu_0) = 0, \tag{2.2.5$_{m-1}$}$$

$$Lu_m(x) := 0, \tag{2.2.4$_m$}$$

$$D\pi_m(t) := \sum_{\substack{i+j=m-1\\ i,j\ge -1}} \pi_i(t)\pi_j'(t) + \sum_{\substack{i+j=m-1\\ i\ge 0,\, j\ge -1}} u_i\left(t\mu^2\right)\pi_j'(t) + t\pi_m'(t) + \frac{1}{2}\pi_m(t),$$

$$\pi_m(\mu_0) = 0, \tag{2.2.5$_m$}$$

$$Lu_{m+1}(x) := 0, \tag{2.2.4$_{m+1}$}$$

$$D\pi_{m+1}(t) := \sum_{\substack{i+j=m\\ i,j\ge -1}} \pi_i(t)\pi_j'(t) + \sum_{\substack{i+j=m\\ i\ge 0,\, j\ge -1}} u_i\left(t\mu^2\right)\pi_j'(t) + t\pi_{m+1}'(t) + \frac{1}{2}\pi_{m+1}(t),$$

$$\pi_{m+1}(\mu_0) = 0, \tag{2.2.5$_{m+1}$}$$

…………………………………………………………………………..

Теперь будем решать эти задачи последовательно.

Теорема 1. При условии $b > 0$ задача (2.2.3$_{-1}$) имеет единственное ограниченное положительное решение на отрезке $[0, \mu_0] = I$ и

$$\pi_{-m}(t) \le \frac{l}{t}\ , \left|\pi_{-m}{}'(t)\right| \le \frac{l}{t^2}, \quad (t > 0). \tag{2.2.6}$$

Здесь и далее постоянные не зависящие от малого параметра обозначим через $l, l_0, l_1, l_2, \ldots.$.

Доказательство. Уравнение (2.2.3$_{-1}$) перепишем в виде

$$Qz := (t+z)z'(t) + \frac{1}{2}z = h(t,z), \;\; z(\mu_0) = b\mu, \tag{2.2.7}$$

где $h(t,z) = (1/2 + q(\mu(t))z.$

Задача

$$Qz := (t+z)z'(t) + \frac{1}{2}z = 0, \;\; z(\mu_0) = b\mu,$$

имеет решение

$$t = c_0\xi^{-2} - \frac{2\xi}{3} := \psi(\xi, c_0), \tag{2.2.8}$$

где $c_0 = b^2 + b^3\dfrac{2\mu^2}{3}, \quad \xi_0 = \xi(0) = \left[\dfrac{3c_0}{2}\right]^{\frac{1}{3}}, \;\; \xi(\mu_0) = b\mu.$

Так, как $t'(\xi) < 0$ при $\xi \in [\xi_0, c_0]$, то существует единственная строго убывающая функция $\xi = \psi^{-1}(t, c_0) := \varphi(t, c_0), \;\; t \in [0, \mu_0]$.

Из (2.2.8) вытекает, что

$$\xi(t) < \frac{c_0^{1/2}}{t^{1/2}}, \quad (t > 0). \tag{2.2.9}$$

Решение задачи (2.2.7) ищем методом вариации постоянной Лагранжа, т.е. в виде

$$z = \varphi(t,c) \text{, где } c = c(t) \tag{2.2.10}$$

Тогда подставляя (2.2.10) в (2.2.7) для $c(t)$ имеем уравнение

$$c'(t) = \frac{h(t,\varphi(t,c))}{(t+\varphi)\varphi_c(t,c(t))} = \frac{(m+q(\mu t))\varphi(t,c)}{(t+\varphi(t,c))\varphi_c(t,c(t))}. \tag{2.2.11}$$

Из (2.2.8)

$$c = t\varphi^2 + \frac{2\varphi^{3/2}}{3}.$$

Однако,

$$\frac{\partial c}{\partial \varphi} = 2t\varphi(t,c) + 2\varphi^2(t,c) = 2\varphi(t+\varphi). \tag{2.2.12}$$

Поэтому (2.2.11) можно записать в виде

$$c'(t) = 2(m+q(\mu t))\frac{c}{t + \frac{2\varphi}{3}}.$$

Отсюда, имеем

$$c = c_0 \exp\left\{ \frac{3}{2} \int_{\mu_0}^{t} \frac{1/2 + q(\mu s)}{(3/2)s + \varphi(s, c(s))} ds \right\} := F(t, c).$$

Очевидно, что $\varphi(t, c_0)$ отображает отрезок $\left[0, \mu_0\right]$ на отрезок $\left[\xi_0, b\mu^m\right]$.

Оператор $F(t,c)$ отображает отрезок $J = [c_0, c_0 l]$ в себя, где

$$J = c_0 \exp\left\{ \frac{3}{2} \mu \int_0^{\mu_0} \frac{ls}{(3/2)s + l_0} ds \right\} \le c_0 e^l ,$$

Здесь, мы использовали неравенство $|m + q(\mu t)| \le l \mu t$.

Теперь докажем, что оператор F является сжимающим в J. Имеем

$$|F(t, c_1) - F(t, c_2)| =$$

$$= \left| c_0 \exp\{(3/2)\mu \int_{\mu_0}^{t} \frac{(1/2 + q(\mu s))ds}{(3/2)s + \varphi(s, c_1(s))}\} - c_0 \exp\{(3/2)\mu \int_{\mu_0}^{t} \frac{(1/2 + q(\mu s))ds}{(3/2)s + \varphi(s, c_2(s))}\} \right|.$$

Применяя формулу Лагранжа, отсюда имеем

$$|F(t, c_1) - F(t, c_2)| \le l \int_{\mu_0}^{t} \mu s \frac{|\varphi(s, c_1(s)) - \varphi(s, c_2(s))ds|}{[(3/2)s + \varphi(s, c_1(s))][(3/2)s + \varphi(s, c_2(s))]}.$$

Теперь используя (2.2.12) получим

$$|F(t, c_1) - F(t, c_2)| \le l \mu \int_{t}^{\mu_0} \frac{(s/2)\varphi^{-1}(s, c)|c_1(s) - c_2(s)|ds}{((3/2)s + c_0)^2 (S + \varphi(s))}. \qquad (2.2.13)$$

Для функции $c_0(t) \in [c_0, c_0 l]$ неравенство (2.2.9) выполняется, поэтому интеграл в правой части неравенства (13) разделив на два интеграла и оценивая, получим

$$\int_0^1 \frac{(s/2)\varphi^{-1}(s, c)|c_1(s) - c_2(s)|ds}{((3/2)s + c_0)^2 (S + \varphi(s))} + \int_l^{\mu_0} \frac{(s/2)\varphi^{-1}(s, c)|c_1(s) - c_2(s)|}{((3/2)s + c_0)^2 (S + \varphi(s))} ds \le$$

$$\le l\|c_1 - c_2\| + l_1\|c_1 - c_2\| \int_l^{\mu_0} \frac{sds}{((3/2)s + c_0)^2 (S + b\mu)} ds \le l_2 \|c_1 - c_2\|.$$

Таким образом,

$$|F(t, c_1) - F(t, c_2)| \le \mu l_3 \|c_1 - c_2\|$$

Поэтому F является сжимающим на отрезке J. Теорема доказана.

Задача для $\pi_0(t)$ имеет вид

$$D\pi_0(t) := \left(t+\pi_{-1}(t)\right)\pi_0'(t) + \pi_{-1}'(t)\left(\pi_0(t) + u_0\left(t\mu^2\right)\right) + \frac{1}{2}\pi_0(t), \qquad (2.2.5_0)$$
$$\pi_0(\mu_0) = 0,$$

Для решения этой неоднородной задачи нам нужна следующая лемма.

Лемма 1. Однородное уравнение

$$D\xi(t) := (t+\pi_{-1}(t))\xi(t) + (\pi_{-1}(t) + 1/2)\xi = 0,$$

имеет фундаментальное решение

$$\xi_0(t) = \exp\left\{\int_{\mu_0}^{t} \frac{1/2 - \pi_{-1}'(s)}{s+\pi_{-1}(s)} ds\right\} = \frac{1+b\mu^2}{\mu(t+\pi_{-1}(t))} \exp\left\{-\int_{t}^{\mu_0} \frac{3/2}{s+\pi_{-1}(s)} ds\right\},$$

или

$$\xi_0(t) = \frac{1+b\mu^2}{\mu(t+\pi_{-1}(t))} X(t,\mu)\phi(t,\mu),$$

где

$$X(t,\mu) = \exp\{-\int_t^{\mu_0} \frac{1/2 + q(\mu s)}{s+\pi_{-1}(s)} ds\}, \quad \phi(t,\mu) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^{\mu_0} \frac{ds}{s+\pi_{-1}(s)}\right\}.$$

Из выражения $X(t,\mu)$ видно, $\|X(t,\mu)\| \le l, \|X^{-1}(t,\mu)\| \le l, |X'(t,\mu)| \le \dfrac{l_1}{t+\pi_{-m}(t)} \le l$.

Решение неоднородного уравнения ($2.2.5_0$) представляется в виде

$$\pi_0(t) = -\frac{1}{t+\pi_{-1}(t)} X(t,\mu)\phi(t,\mu)\int_t^{\mu_0} X(s,\mu)\phi(s,\mu)\frac{d[u_0(\mu s)\pi_{-1}(s)]}{ds} ds.$$

После интегрирования по частям и оценки имеем

$$|\pi_0(t)| \le M,\ t\in J;\ |\pi_0(t)| < \frac{L}{t^{m+1}} \quad (t>0), \quad |\pi_0'(t)| < \frac{L}{t^{m+2}} \quad (t>0), \qquad (2.2.14)$$

Таким образом доказали следующую лемму.

Лемма2. Задача (2.2.4.0) имеет единственное ограниченное решение на отрезке $[0,\mu_0]$ и имеет место оценки (2.2.14).

Аналогично доказывается, что все уравнения (2.2.4.к) (к=1, 2, …) также имеют единственные решения из $C^{(\infty)}[0,\mu_0]$ и

$$|\pi_k(t)| \le L,\ |\pi_k(t)| \le \frac{L}{t^2},\ |\pi_k'(t)| < \frac{L}{t^3},\ (t>0).$$

Теперь для уравнений ($2.2.4_0$), ($2.2.4_1$), ($2.2.4_2$) нам потребуется следующая

Лемма 3.

$$Lg(x)=\gamma(x) \qquad (2.2.15)$$

где $\gamma(x)\in c^{(\infty)}[0,1]$ имеет единственное решение из класса $c^{(\infty)}[0,1]$ и оно представляется в виде

$$g(x)=x^{-1}p(x)\int\limits_0^x x^{-1}p^{-1}(s)\gamma(s)ds,\ \ p(x)=\exp\left\{\int\limits_1^x \frac{1/2+q(s)}{s}ds\right\}. \qquad (2.2.16)$$

Действительно, общее решение уравнения (2.2.16) имеет вид

$$g(x)=p(x)x^{-1}\left[g(1)+\int\limits_1^x s^{-1/2}p^{-1}(s)\gamma(s)ds\right].$$

Если мы выберем $g(1)=-\int\limits_0^1 s^{-1/2}p^{-1}(s)\gamma(s)ds$, то получим (2.2.16).

Из этой леммы 3 следует, что все уравнения (2.2.4$_0$), (2.2.4$_1$),… имеют единственные решения

$$u_k(x)\in c^{(\infty)}[0,1] \text{ и } u_k(x)\equiv 0,\quad k\neq \operatorname{mod} 2.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Пусть выполнено условие $U: q(x), r(x)\in c^{(\infty)}[0,1]$, $q(0)=1/2$ и $b=u^0-\int_0^1 s^{-1/2}\exp\left\{\int_s^1 \frac{q(\tau)+1/2}{\tau}d\tau\right\}ds>0$. Тогда, задача (2.1.1) имеет единственное решение и ее асимптотика представляется в виде (2.2.3).

Доказательство.Оценка остаточного члена. Теперь докажем,что ряд (2.2.3) действительно является асимтотическим рядом, т.е. если ряд (2.2.3) представим в виде

$$\begin{aligned}&u(x,\mu)=\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+u_0(x)+\pi_0(t)+\mu(u_1(x)+\pi_1(t))+\\&+\mu^2(u_2(x)+\pi_2(t))+\mu^3(u_3(x)+\pi_3(t))+\ldots+\mu^n(u_n(x)+\pi_n(t))+\mu^{n+1}U(x,\mu)+\mu^{n+1}\xi(t,\mu)\end{aligned} \qquad (2.2.17)$$

тогда $|U(x,\mu)|\le l,\ (x\in[0,1]),\ |\xi(t,\mu)|\le l,\ t\in[0,\mu_0]$.

Для простоты, доказательство проведем для $n=-1$, т.е. для случая когда имеет вид

$$u(x,\mu)=\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+U(x,\mu)+\xi(t,\mu), |U(x,\mu)|\le l,\ (x\in[0,1]),\ |\xi(t,\mu)|\le l,\ t\in[0,\mu_0]. \qquad (2.2.18)$$

Доказательство. Подставляя (2.2.18) в уравнение (2.2.2) для $\pi_{-1}(t)$ имеем уравнение (2.2.4$_{-1}$), для $U(x,\mu)$ и $\xi(t,\mu)$ получаем уравнения:

$$LU\left(x,\mu\right)=r(x),\ U(x,\mu)\in C^{\infty}[0,1], \tag{2.2.19}$$

$$\begin{gathered}D\xi(t,\mu)=-[\mu U(\mu t,\mu)+\mu\xi(t,\mu)]\frac{d\xi(t,\mu)}{dt}-\mu\frac{dU(\mu t,\mu)}{dt}\xi(t,\mu)-\\ -\frac{dU(\mu t,\mu)}{dt}\pi_0(t)-U(\mu t,\mu)\pi_0(t)-\mu U(\mu t,\mu)\frac{dU(\mu t,\mu)}{dt},\ \pi_0(\mu_0)=0.\end{gathered} \tag{2.2.20}$$

Уравнение (2.2.19) имеет решение $U\left(x,\mu\right)=u_0(x)\in C^{\infty}[0,1]$. Из (2.2.20) переходим в интегральное уравнение

$$\begin{gathered}\xi(t,\mu)=\frac{\phi(t,\mu)}{t+\pi_{-1}(t)}\int_t^{\mu_0}\phi^{-1}(s,\mu)[(\mu U(\mu s,\mu)+\mu^m\xi(s,\mu))\frac{d\xi(s,\mu)}{ds}+\mu\frac{dU(\mu s,\mu)}{ds}\xi(s,\mu)+\\ +\frac{dU(\mu s,\mu)}{ds}\pi_{-1}(s)+U(\mu t,\mu)\pi_{-1}(t)+\mu U(\mu s,\mu)\frac{dU(\mu s,\mu)}{ds}]ds.\end{gathered}$$

Отсюда, интегрируя первый член в подынтегральном выражении, получаем слабо возмущенное интегральное уравнение Вольтерра, которое имеет ограниченное решение на отрезке $J=[0,\mu_0]$. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим задачу.

Пример 2.2

$$\left(x+\varepsilon u\left(x\right)\right)u'\left(x\right)+\frac{1}{2}u\left(x\right)=x,\ u\left(1\right)=b, \tag{2.2.21}$$

Уравнение

$$xu'\left(x\right)+\frac{1}{2}u\left(x\right)=x,$$

имеет регулярное решение

$$u_0\left(x\right)=\frac{2}{3}x.$$

Уравнение для $\pi_0\left(t\right)$ имеет вид

$$\left(t+\pi_{-1}\left(t\right)\right)\pi_0'\left(t\right)+\left(\pi_{-1}'\left(t\right)+\frac{1}{2}\right)\pi_0\left(t\right)=-\frac{2}{3}\mu^2 t\pi_{-1}'\left(t\right),\ \pi_0\left(\tilde{\mu}\right)=0,\ \tilde{\mu}=1/\mu^2.$$

Решение этого уравнения представляется в виде

$$\pi_{-1}\left(t\right)=\frac{2}{3\left(t+\pi_{-1}\left(t\right)\right)}\int_t^{\mu}X\left(t\right)X^{-1}\left(s\right)\pi_{-1}'\left(s\right)\mu^2 s ds,$$

где

$$X\left(t\right)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^{\tilde{\mu}}\frac{ds}{s+\pi_{-1}\left(s\right)}ds\right\}.$$

Отсюда следует, что $\left|\pi_{-1}(t)\right| \le \frac{2}{3}$.

Поэтому асимптотику решения задачи (2.2.21) можно записать в виде

$$u(x) = \frac{1}{\mu}\pi_{-1}(t) + \frac{2}{3}x + \pi_0(t) + O(\mu),\ x = \mu^2 t,\ \varepsilon = \mu^3.$$

§ 2.3 Случай, когда решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет полюс рационального порядка меньшего единицы решения невозмущенного уравнения

Пусть для уравнения (1.1.1) выполнено следующее условие У 2.3: $q(x),\ r(x) \in C^{(\infty)}[0,1],\ \ q_0 = p/q,\ p < q,\ p,q \in N$.

Решение невозмущенной задачи (1.1.2) представляется в виде:

$$u_0(x) = x^{-p/q} w(x), \tag{2.3.1}$$

где

$$P(x) = \exp\{\int_1^x \left(\frac{p}{q} - q(s)\right) s^{-1} ds\} \in \mathrm{C}^{\omega}[0,1],$$

$$w(x) = P(x)[w_0 + \int_0^x s^{\frac{p-q}{p}} P^{-1}(s)\, r(s) ds] \in \mathrm{C}^{\omega}[0,1],$$

$$A = \int_0^1 P^{-1}(s) s^{\frac{p-q}{p}}\, r(s) ds,\ w_0 = (b - A) P(0). \tag{2.3.2}$$

Решение задачи (1.1.1)-(1.1.2) ищется в виде

$$\begin{aligned} u(x) &= \mu^{-p}\pi_{-p}(t) + \ldots + \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + \pi_0(t) + u_0(x) + \\ &+ \left(\pi_1(t) + u_1(x)\right)\mu + \left(\pi_2(t) + u_2(x)\right)\mu^2 + \ldots + \left(\pi_n(t) + u_n(x)\right)\mu^n + \ldots, \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

где $t = x/\mu^q,\ \varepsilon = \mu^{p+q},\ u_k(x) \in C^{(\infty)}[0,1],\ \pi_k(t) \in C^{(\infty)}[0,\mu_0],\ \mu_0 = 1/\mu$.

Отметим, что функции $\pi_k(t) = \pi_k(t,\mu)$, т.е. является функцией двух переменных t и μ, но зависимость от μ не указываем. Это видно из уравнений, из которых определяются функции $\pi_k(t)$. Начальные условия для функций $\pi_j(t)$ берем в виде

$$\begin{aligned} &\pi_{-p}(\mu_0) = \mu^p b, b = u^{(0)} - u_0(1) - \mu u_1(1) - \mu^2 u_2(1) - \ldots - \mu^n u_n(1) - \ldots, \\ &\pi_k(\mu_0) = 0, k = -p+1, -p+2, \ldots, 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Подставляя (2.3.3) в (2.3.1) имеем

$$\left[\mu^{q}\left(t+\pi_{-p}(t)\right)+\mu^{q+1}\pi_{-p+1}(t)+\mu^{q+2}\pi_{-p+2}(t)+\ldots+\mu^{q+p-1}\pi_{-1}(t)+\mu^{q+p}\left(u_0(x)+\pi_0(t)\right)+\right.$$
$$\left.+\mu^{q+p+1}\left(u_1(x)+\pi_1(t)\right)+\mu^{q+p+2}\left(u_2(x)+\pi_2(t)\right)+\mu^{q+p+3}\left(u_3(x)+\pi_3(t)\right)+\ldots\right]\cdot\left[\mu^{-q-p}\pi'_{-p}(t)+\mu^{-q-p+1}\pi'_{-p+1}(t)+\right.$$
$$+\mu^{-q-p-2}\pi'_{-p+2}(t)+\ldots+\mu^{-q-1}\pi'_{-1}(t)+\mu^{-q}\pi'_0(t)+u'_0(x)+\mu^{-q+1}\pi'_1(t)+\mu u'_1(x)+$$
$$+\mu^{-q+2}\pi'_2(t)+\mu^2u'_2(x)+\ldots.)+\frac{p}{q}\left(\mu^{-p}\pi_{-p}(t)+\mu^{-p+1}\pi_{-p+1}(t)+\ldots+\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+\right.$$
$$\left.+\pi_0(t)+u_0(x)+\mu\left(\pi_1(t)+u_1(x)\right)+\ldots\right)=r(x).$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ получим:

$$\left(t+\pi_{-p}(t)\right)\pi'_{-p}(t)+\frac{p}{q}\pi_{-p}(t)=0,\quad \pi_{-p}(\mu_0)=b\mu^{p}, \tag{2.3.4-p}$$

$$\left(t+\pi_{-p}(t)\right)\pi'_{-p+1}(t)+\pi'_{-p}(t)\pi_{-p+1}(t)+\frac{p}{q}\pi_{-p+1}(t)=0,\quad \pi_{-p+1}(\mu_0)=0, \tag{2.3.4-p+1}$$

$$\left(t+\pi_{-p}(t)\right)\pi'_{-p+2}(t)+\pi'_{-p+1}(t)\pi_{-p+1}(t)+\pi'_{-p}(t)\pi_{-p+2}(t)+\frac{p}{q}\pi_{-p+2}(t)=0,\quad \pi_{-p+2}(\mu_0)=0, \tag{2.3.4-p+2}$$

$$\left(t+\pi_{-p}(t)\right)\pi'_{-p+3}(t)+\pi'_{-p+2}(t)\pi_{-p+1}(t)+\pi'_{-p+1}(t)\pi_{-p+2}(t)+\pi'_{-p}(t)\pi_{-p+3}(t)+\frac{p}{q}\pi_{-p+3}(t)=0,$$
$$\pi_{-p+3}(\mu_0)=0, \tag{2.3.4-p+3}$$

$$\left(t+\pi_{-p}(t)\right)\pi'_{-p+4}(t)+\pi'_{-p+3}(t)\pi_{-p+1}(t)+\pi'_{-p+2}(t)\pi_{-p+2}(t)+\pi'_{-p+1}(t)\pi_{-p+3}(t)+\pi'_{-p}(t)\pi_{-p+4}(t)+$$
$$+\frac{p}{q}\pi_{-p+4}(t)=0,\quad \pi_{-p+4}(\mu_0)=0, \tag{2.3.4-p+4}$$

$$\left(t+\pi_{-p}(t)\right)\pi'_{-p+5}(t)+\pi'_{-p+4}(t)\pi_{-p+1}(t)+\pi'_{-p+3}(t)\pi_{-p+2}(t)+\pi'_{-p+2}(t)\pi_{-p+3}(t)+$$
$$+\pi'_{-p+1}(t)\pi_{-p+4}(t)+\pi'_{-p}(t)\pi_{-p+5}(t)+\frac{p}{q}\pi_{-p+5}(t)=0,\quad \pi_{-p+5}(\mu_0)=0, \tag{2.3.4-p+5}$$

……………………………………………………………

$$D\pi_{-1}(t):=\sum_{\substack{i+j=p-1\\ i,j\in N}}\pi_{-p+i}(t)\pi'_{-p+j}(t),\qquad \pi_{-1}(\mu_0)=0, \tag{2.3.4-1}$$

$$D\pi_0(t):=\pi_{-p}(t)\frac{du_0(\mu t)}{dt}+u_0(\mu t)\pi'_{-p}(t)+\pi_{-p+1}(t)\pi'_{-1}(t)+\pi_{-p+2}(t)\pi'_{-2}(t)+$$
$$+\pi_{-p+3}(t)\pi'_{-3}(t)+\ldots+\pi_{-2}(t)\pi'_{-p+2}(t)+\pi_{-1}(t)\pi'_{-p+1}(t),\qquad \pi_0(\mu_0)=0, \tag{2.3.40}$$

$$Lu_0(x):=xu_0{}'(x)-q(x)u_0(x)=r(x), \tag{2.3.50}$$

$$D\pi_1(t):=\pi_{-p}(t)\frac{du_1(\mu t)}{dt}+u_1(\mu t)\pi'_{-p}(t)+\pi_{-p+1}(t)\pi'_0(t)+\pi_{-m+2}(t)\pi'_{-1}(t)+$$
$$+\pi_{-m+3}(t)\pi'_{-2}(t)+\ldots+\pi_{-2}(t)\pi'_{-p+3}(t)+\pi_{-1}(t)\pi'_{-p+2}(t)+\left(u_0(\mu t)+\pi_0(t)\right)\pi'_{-p+1}(t),$$
$$\pi_1(\mu_0)=0, \tag{2.3.41}$$

$$Lu_1(x) := 0, \tag{2.3.5$_1$}$$

$$D\pi_2(t) := \frac{d}{dt}[\pi_{-p}(t)u_2(\mu t)] + \pi_{-p+1}(t)\pi_1'(t) + \pi_{-p+2}(t)\pi_0'(t) + \pi_{-p+3}(t)\pi_{-1}'(t) +$$
$$+ \ldots + \pi_{-2}(t)\pi'_{-p+4}(t) + \pi_{-1}(t)\pi'_{-p+3}(t) + \left(u_0(\mu t) + \pi_0(t)\right)\pi'_{-p+2}(t) + \tag{2.3.4$_2$}$$
$$+\left(u_1(\mu t) + \pi_1(t)\right)\pi'_{-p+1}(t), \qquad \pi_2(\mu_0) = 0,$$

$$Lu_2(x) := 0, \tag{2.3.5$_2$}$$

$$D\pi_3(t) := -\frac{d}{dt}[\pi_{-m}(t)u_3(\mu t)] - \sum_{\substack{k+j=3 \\ k=3,4,\ldots,m+4 \\ j=(-m+4,\ldots,0)}} \pi_{-m+k}(t)\pi_j'(t) -$$
$$-\sum_{\substack{k+j=3 \\ k\in N \\ j=0,1}} \left(u_j(x) + \pi_j(t)\right)\pi'_{-m+k}(t), \tag{2.3.4$_3$}$$

$$Lu_3(x) := 0, \tag{2.3.5$_3$}$$

$$D\pi_4(t) := \frac{d}{dt}[\pi_{-p}(t)u_4(\mu t)] + \sum_{\substack{i+j=4 \\ i}} \pi_{-p+k}(t)\pi_j'(t) +$$
$$+\sum_{\substack{i+j=4 \\ i\in N \\ j=0,1}} \left(u_j(x) + \pi_j(t)\right)\pi'_{-p+i}(t), \quad \pi_4(\mu_0) = 0, \tag{2.3.4$_4$}$$

$$Lu_4(x) := 0, \tag{2.3.5$_4$}$$

$$D\pi_5(t) := \frac{d[u_5(\mu t)\pi_{-p}(t)]}{dt} + \sum_{\substack{k+j=5 \\ i\in N}} \pi_{-i+k}(t)\pi_j'(t) +$$
$$+\sum_{\substack{k+j=5 \\ i\in N \\ j=0,1}} \left(u_j(x) + \pi_j(t)\right)\pi'_{-p+i}(t), \quad \pi_5(\mu_0) = 0, \tag{2.3.4$_5$}$$

$$Lu_5(x) := 0, \tag{2.3.5$_5$}$$

$$D\pi_6(t) := -\frac{d[u_6(\mu t)\pi_{-p}(t)]}{dt} -$$
$$-\sum_{\substack{k+j=5-p \\ k\in Z,\, k\geq 1-p}} \left(u_k(\mu t) + \pi_k(t)\right)\left(u_j'(\mu t) + \pi'_{j+1}(t)\right), \ \pi_6(\mu_0) = 0, \tag{2.3.4$_6$}$$

$$Lu_6(x) := 0, \tag{2.3.5$_6$}$$

. . . .

$$D\pi_{p-1}(t) := -\frac{d[u_{p-1}(\mu t)\pi_{-p}(t)]}{dt} -$$
$$-\sum_{\substack{i+j=-2 \\ i\in Z,\, i\geq 1-m}} \left(u_i(\mu t) + \pi_i(t)\right)\left(u_j'(\mu t) + \pi'_{j+1}(t)\right), \quad \pi_{p-1}(\mu_0) = 0, \tag{2.3.4$_{p-1}$}$$

$$Lu_{p-1}(x) := 0, \qquad (2.3.5_{p-1})$$

$$D\pi_p(t) := -\frac{d[u_p(\mu t)\pi_{-p}(t)]}{dt} - \sum_{\substack{i+j=-1\\ i\in Z,\, i\geq 1-p}} \left(u_i(\mu t) + \pi_i(t)\right)\left(u_j'(\mu t) + \pi_{j+1}'(t)\right),$$

$$\pi_p(\mu_0) = 0, \ \left(u_\nu(t) \equiv 0, \ \nu < 0\right), \qquad (2.3.4_p)$$

$$Lu_p(x) := 0, \qquad (2.3.5_p)$$

……………………………………………………………………………..

Теперь будем решать эти задачи последовательно.

Теорема 1. При условии $b > 0$ задача ($2.3.4_p$) имеет единственное ограниченное положительное решение на отрезке $[0, \mu_0] = I$ и $\pi_{-p}(t) \leq \frac{l}{t^p}$, $\left|\pi_{-p}{}'(t)\right| \leq \frac{l}{t^{p+1}}$, $\quad (t > 0)$.

Здесь и далее постоянные не зависящие от малого параметра обозначим через $l, l_0, l_1, l_2, \ldots.$.

Доказательство. Уравнение ($2.3.4_p$) перепишем в виде

$$Qz := (t+z)z'(t) + \frac{p}{q}z = h(t,z), \ \ z(\mu_0) = b\mu^p, \qquad (2.3.7)$$

где $h(t,z) = (p/q + q(\mu(t))z.$

Задача

$$Qz := (t+z)z'(t) + \frac{p}{q}z = 0, \ \ z(\mu_0) = b\mu^p.$$

Имеет решение

$$t = c_0\xi^{-q/p} - \frac{q\xi}{q+p} := \psi(\xi, c_0), \qquad (2.3.8)$$

где $c_0 = b^{q/p} + b^{\frac{p+q}{p}} \frac{q\mu^{\frac{p}{q}+1}}{p+q}$, $\quad \xi_0 = \xi(0) = \left[c_0(1+\frac{p}{q})\right]^{\frac{p}{m+q}}$, $\quad \xi(\mu_0) = b\mu^p$.

Так, как $t'(\xi) < 0$ при $\xi \in [\xi_0, c_0]$, то существует единственная строго убывающая функция $\xi = \psi^{-1}(t, c_0) := \varphi(t, c_0), \quad t \in [0, \mu_0]$.

Из (2.3.8) вытекает, что

$$\xi(t) < \frac{c_0^{p/q}}{t^{p/q}}, \quad (t > 0). \qquad (2.3.9).$$

Решение задачи (7) ищем методом вариации постоянной Лагранжа, т.е. в виде

$$z=\varphi(t,c)\,, \tag{2.3.10}$$

где $c=c(t)$.

Тогда подставляя (2.3.10) в (2.3.7) для $c(t)$ имеем уравнение

$$c'(t)=\frac{h(t,\varphi(t,c))}{(t+\varphi)\varphi_c(t,c(t))}=\frac{(p/q+q(\mu t))\varphi(t,c)}{(t+\varphi(t,c))\varphi_c(t,c(t))}. \tag{2.3.11}$$

Из (2.3.8)

$$c=t\varphi^{q/p}+\frac{q\varphi^{1+\frac{q}{p}}}{p+q}.$$

Однако,

$$\frac{\partial c}{\partial\varphi}=\frac{q}{p}t\varphi^{\frac{(q-p)}{p}}(t,c)+\frac{q\varphi^{\frac{q}{p}}(t,c)}{p}=\frac{q}{p}\varphi^{\frac{q-p}{p}}(t+\varphi). \tag{2.3.12}$$

Поэтому (2.3.11) можно записать в виде

$$c'(t)=\frac{q}{p}\left(\frac{p}{q}+q(\mu t)\right)\frac{c}{t+\dfrac{q\varphi}{p+q}}.$$

Отсюда, имеем

$$c=c_0\exp\left\{\left(\frac{p+q}{q}\right)\int_{\mu_0}^{t}\frac{p/q+q(\mu s)}{\left(\dfrac{p+q}{q}\right)s+\varphi(s,c(s))}ds\right\}:=F(t,c).$$

Очевидно, что $\varphi(t,c_0)$ отображает отрезок $[0,\mu_0]$ на отрезок $\left[\xi_0,b\mu^p\right]$.

Оператор $F(t,c)$ отображает отрезок $J=[c_0,c_0l]$ в себя, где

$$J=c_0\exp\left\{\left(\frac{p+q}{q}\right)\mu\int_0^{\mu_0}\frac{ls}{\left(\dfrac{p+q}{p}\right)s+l_0}ds\right\}\le c_0e^l\,.$$

Здесь, мы использовали неравенство $\left|p/q+q(\mu t)\right|\le l\mu t$.

Теперь докажем, что оператор F является сжимающим в J. Имеем

$|F(t,c_1)-F(t,c_2)|=$

$$=\left|c_0\exp\{(\frac{p+q}{q})\mu\int_{\mu_0}^{t}\frac{(p/q+q(\mu s))ds}{(\frac{p+q}{q})s+\varphi(s,c_1(s))}\}-c_0\exp\{(\frac{p+q}{q})\mu\int_{\mu_0}^{t}\frac{(p/q+q(\mu s))ds}{(\frac{p+q}{q})s+\varphi(s,c_2(s))}\}\right|.$$

Применяя формулу Лагранжа, отсюда имеем

$$|F(t,c_1)-F(t,c_2)|\le l\int_{\mu_0}^{t}\mu s\frac{|\varphi(s,c_1(s))-\varphi(s,c_2(s))ds|}{\left[(\frac{p+q}{q})s+\varphi(s,c_1(s))\right]\left[(\frac{p+q}{q})s+\varphi(s,c_2(s))\right]}.$$

Теперь используя (2.3.12) получим

$$|F(t,c_1)-F(t,c_2)|\le l\mu\int_{t}^{\mu_0}\frac{s p\varphi^{1-\frac{q}{p}}(s,c)|c_1(s)-c_2(s)|ds}{q\left((1+p/q)s+c_0\right)^2(S+\varphi(s))}. \qquad (2.3.13)$$

Для функции $c_0(t)\in[c_0,c_0 l]$ неравенство (2.3.9) выполняется, поэтому интеграл в правой части неравенства (2.3.13) разделив на два интеграла и оценивая, получим

$$\int_0^1\frac{sp\varphi^{1-\frac{q}{p}}(s,c)|c_1(s)-c_2(s)|ds}{q\left((1+p/q)s+c_0\right)^2(S+\varphi(s))}+\int_l^{\mu_0}\frac{sp\varphi^{1-\frac{1}{m}}(s,c)|c_1(s)-c_2(s)|}{q\left((1+p/q)s+c_0\right)^2(S+\varphi(s))}ds\le$$

$$\le l\|c_1-c_2\|+l_1\|c_1-c_2\|\int_l^{\mu_0}\frac{sds}{\left((1+p/q)s+c_0\right)^2(S+b\mu^m)}ds\le l_2\|c_1-c_2\|.$$

Таким образом,

$$|F(t,c_1)-F(t,c_2)|\le\mu l_3\|c_1-c_2\|.$$

Поэтому F является сжимающим на отрезке J. Теорема доказана.

Далее решаем последовательно задачи ($2.3.4_{p+k}$) (k=1, 2, …). Задача ($2.3.4_{p+1}$) однородная с нулевым начальным условием. Поэтому оно имеет тривиальное решение: $\pi_{-p+1}(t)=0$. Тогда задача $\pi_{-p+2}(t)$ также будет иметь нулевое решение. Аналогично, $\pi_{-p+3}(t)=...=\pi_{-2}(t)\equiv 0$. Задача для $\pi_0(t)$ имеет вид

$$D\pi_0(t)=-u_0(\mu t)\pi_0'(t)-\frac{du_0(\mu t)}{dt}\pi_0(t)\ ,\quad \pi_0(\mu_0)=0, \qquad (2.3.14_0)$$

Для решения этой неоднородной задачи нам нужна следующая лемма.

Лемма 1. Однородное уравнение

$$D\xi(t):=(t+\pi_{-p}(t))\xi(t)+(\pi_{-p}(t)-q(\mu t))\xi=0,$$

имеет фундаментальное решение

$$\xi_0(t)=\exp\left\{\int\limits_{\mu_0}^{t}\frac{p/q-\pi'_{-p}(s)}{s+\pi_{-p}(s)}ds\right\}=\frac{1+b\mu^{p+1}}{\mu(t+\pi_{-p}(t))}\exp\left\{-\int\limits_{t}^{\mu_0}\frac{1+p/q}{s+\pi_{-p}(s)}ds\right\},$$

или

$$\xi_0(t)=\frac{1+b\mu^{p+1}}{\mu(t+\pi_{-p}(t))}X(t,\mu)\phi(t,\mu),$$

где

$$X(t,\mu)=\exp\{-\int_t^{\mu_0}\frac{p/q+q(\mu s)}{s+\pi_{-p}(s)}ds\},\ \phi(t,\mu)=\exp\left\{(\frac{p}{q}-1)\int\limits_{t}^{\mu_0}\frac{ds}{s+\pi_{-p}(s)}\right\}.$$

Из выражения $X(t,\mu)$ видно, $\|X(t,\mu)\|\le l, \|X^{-1}(t,\mu)\|\le l, |X'(t,\mu)|\le\frac{l_1}{t+\pi_{-p}(t)}\le l$.

Решение неоднородного уравнения (2.3.14$_0$) представляется в виде

$$\pi_0(t)=-\frac{1}{t+\pi_{-p}(t)}X(t,\mu)\phi(t,\mu)\int_t^{\mu_0}X(s,\mu)\phi(s,\mu)\frac{d[u_0(\mu s)\pi_{-p}(s)]}{ds}ds.$$

После интегрирования по частям и оценки имеем

$$|\pi_0(t)|\le M,\ t\in J;\ |\pi_0(t)|<\frac{L}{t^{p+1}}\quad(t>0),\quad |\pi'_0(t)|<\frac{L}{t^{p+2}}\quad(t>0). \qquad (2.3.15_0)$$

Таким образом, доказали следующую лемму.

Лемма 2. Задача (2.3.14$_0$) имеет единственное ограниченное решение на отрезке $[0,\mu_0]$ и имеет место оценки (2.3.15$_0$).

Аналогично доказывается, что все уравнения (2.3.4$_к$) (к=1, 2, …) также имеют единственные решения из $C^{(\infty)}[0,\mu_0]$ и

$$|\pi_k(t)|\le L, |\pi_k(t)|\le\frac{L}{t^{p+1}},\quad |\pi'_k(t)|<\frac{L}{t^{p+2}}\quad(t>0).$$

Теперь для уравнений (2.3.5$_0$), (2.3.5$_1$), (2.3.5$_2$) нам потребуется следующая

Лемма 3.

$$Lg(x)=\gamma(x), \qquad (2.3.16)$$

где $\gamma(x)\in c^{(\infty)}[0,1]$ имеет единственное решение из класса $c^{(\infty)}[0,1]$ и оно представляется в виде

$$g(x) = x^{-p} p(x) \int_0^x x^{p-1} p^{-1}(s)\gamma(s)ds, \;\; p(x) = \exp\left\{ \int_1^x \frac{q(s) + p/q}{s} ds \right\}. \qquad (2.3.17).$$

Действительно, общее решение уравнения (2.3.16) имеет вид

$$g(x) = p(x)x^{-p} \left[g(1) + \int_1^x s^{p-1} p^{-1}(s)\gamma(s)ds \right].$$

Если мы выберем $g(1) = -\int_0^1 s^{p-1} p^{-1}(s)\gamma(s)ds$, то получим (2.3.17).

Из этой леммы 3 следует, что все уравнения ($2.3.5_0$), ($2.3.5_1$),… имеют единственные решения $u_k(x) \in c^{(\infty)}[0,1]$ и $u_k(x) \equiv 0, \quad k \neq \mathrm{mod}\, p.$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Пусть выполнено условие $U: q(x), r(x) \in c^{(\infty)}[0,1]$, $q(0) = p/q, \; p < q$ и $b = u^0 - \int_0^1 s^{\frac{p-q}{q}} \exp\left\{ \int_s^1 \frac{q(\tau) + p/q}{\tau} d\tau \right\} ds > 0$. Тогда, задача (2.3.1) имеет единственное решение и ее асимптотика представляется в виде (2.3.3).

Доказательство. Оценка остаточного члена. Теперь докажем, что ряд (2.3.3) действительно является асимтотическим рядом, т.е. если ряд (2.3.3) представим в виде

$$\begin{aligned} u(x) &= \mu^{-p}\pi_{-p}(t) + \ldots + \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + \pi_0(t) + u_0(x) + \left(\pi_1(t) + u_1(x)\right)\mu + \\ &+ \left(\pi_2(t) + u_2(x)\right)\mu^2 + \ldots + \left(\pi_n(t) + u_n(x)\right)\mu^n + \mu^{n+1}U(x,\mu) + \mu^{n+1}\xi(t,\mu), \end{aligned} \qquad (2.3.18)$$

тогда $|U(x,\mu)| \le l, \; (x \in [0,1]), \; |\xi(t,\mu)| \le l, \; t \in [0,\mu_0].$

Для простоты, доказательство проведем для $n = -1$, т.е. для случая когда имеет вид

$$\begin{aligned} &u(x,\mu) = \mu^{-p}\pi_{-p}(t) + \mu^{-p+1}\pi_{-p+1}(t) + \ldots + \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + U(x,\mu) + \xi(t,\mu), \\ &|U(x,\mu)| \le l, \; (x \in [0,1]), \; |\xi(t,\mu)| \le l, \; t \in [0,\mu_0]. \end{aligned} \qquad (2.3.19)$$

Доказательство. Подставляя (2.3.19) в уравнение (2.3.2) для $\pi_{-p}(t)$ имеем уравнение ($2.3.4_{-p}$), для $U(x,\mu)$ и $\xi(t,\mu)$ получаем уравнения:

$$LU(x,\mu) = r(x), \; U(x,\mu) \in C^\infty[0,1], \qquad (2.3.20)$$

$$\begin{aligned} &D\xi(t,\mu) = -[\mu^p U(\mu t,\mu) + \mu^p \xi(t,\mu)] \frac{d\xi(t,\mu)}{dt} - \mu^p \frac{dU(\mu t,\mu)}{dt} \xi(t,\mu) - \\ &- \frac{dU(\mu t,\mu)}{dt} \pi_{-p}(t) - U(\mu t,\mu)\pi_{-p}(t) - \mu^p U(\mu t,\mu) \frac{dU(\mu t,\mu)}{dt}, \;\; \pi_{-p}(\mu_0) = 0. \end{aligned} \qquad (2.3.21)$$

Уравнение (2.3.20) имеет решение $U(x,\mu)=u_0(x)\in C^{\infty}[0,1]$. Из (2.3.21) переходим в интегральное уравнение

$$\xi(t,\mu)=\frac{\phi(t,\mu)}{t+\pi_{-p}(t)}\int_t^{\mu_0}\phi^{-1}(s,\mu)[(\mu^p\,U(\mu s,\mu)+\mu^p\xi(s,\mu))\frac{d\xi(s,\mu)}{ds}+\mu^p\,\frac{dU(\mu s,\mu)}{ds}\xi(s,\mu)+$$

$$+\frac{dU(\mu s,\mu)}{ds}\pi_{-p}(s)+U(\mu t,\mu)\pi_{-p}(t)+\mu^pU(\mu s,\mu)\frac{dU(\mu s,\mu)}{ds}]ds.$$

Отсюда, интегрируя первый член в подынтегральном выражении, получаем слабо возмущенное интегральное уравнение Вольтерра, которое имеет ограниченное решение на отрезке $J=[0,\mu_0]$. Теорема 2 доказана.

Пример 2.3

$$\left(x+\varepsilon u(x)\right)u'(x)+\frac{p}{q}u(x)=x,\ u(1)=b, \tag{2.2.22}$$

Уравнение

$$\left(t+\pi_{-1}(t)\right)\pi_{-1}'(t)+\frac{p}{q}\pi_{-1}(t)=0\Rightarrow t=c_0\pi_{-1}^{q/p}(t)-\frac{q}{p+q}\pi_{-1}(t),$$

$$c_0=b^{q/p}+b^{\frac{p+q}{p}}\frac{q\mu^{\frac{p}{q}+1}}{p+q},\ \pi_{-1}(\mu_0)=b\mu^p.$$

Уравнение

$$xu'(x)+\frac{p}{q}u(x)=x,$$

имеет регулярное решение

$$u_0(x)=\frac{q}{p+q}x$$

Уравнение для $\pi_0(t)$ имеет вид

$$\left(t+\pi_{-1}(t)\right)\pi_0'(t)+\left(\pi_{-1}'(t)+\frac{p}{q}\right)\pi_0(t)=-\frac{q}{p+q}\mu^q t\pi_{-1}'(t),\ \pi_0\left(\overset{\square}{\mu}\right)=0,\ \overset{\square}{\mu}=1/\mu^q,\ p<q.$$

Решение этого уравнения представляется в виде

$$\pi_{-1}(t)=\frac{q}{(p+q)\left(t+\pi_{-1}(t)\right)}\int_t^{\mu}X(t)X^{-1}(s)\pi_{-1}'(s)\mu^2 sds,$$

где

$$X(t)=\exp\left\{-\frac{p}{q}\int_t^{\mu}\frac{ds}{s+\pi_{-1}(s)}ds\right\}$$

Отсюда следует, что $\left|\pi_{-1}(t)\right|\le\dfrac{q}{p+q}$.

Поэтому асимптотику решения задачи (2.3.22) можно записать в виде

$$u(x)=\frac{1}{\mu}\pi_{-1}(t)+\frac{q}{p+q}x+\pi_0(t)+O(\mu),\ x=\mu^q t,\ \varepsilon=\mu^{p+q}.$$

§ 2.4 Случай, когда решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет полюс первого порядка решения невозмущенного уравнения

Пусть для уравнения (1.1.1) выполнено следующее условие У 2.4: $q(x),\ r(x)\in C^{(\infty)}[0,1],\ \ q_0=1$.

Решение невозмущенной задачи (1.1.2) представляется в виде:

$$u_0(x)=x^{-1}w(x), \tag{2.4.1.}$$

где

$$\begin{gathered}P(x)=\exp\{\int_1^x(1-q(s))s^{-1}ds\}\in \mathrm{C}^{\omega}[0,1],\\ w(x)=P(x)[w_0+\int_0^x P^{-1}(s)\,r(s)ds]\in \mathrm{C}^{\omega}[0,1],\\ A=\int_0^1 P^{-1}(s)\,r(s)ds,\ w_0=(b-A)P(0).\end{gathered}\tag{2.4.2}$$

Решение задачи (1.1.1)-(1.1.2) ищется в виде

$$\begin{gathered}u(x,\mu)=\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+u_0(x)+\pi_0(t)+\mu(u_1(x)+\pi_1(t))+\mu^2(u_2(x)+\pi_2(t))+\\ +...+\mu^n(u_n(x)+\pi_n(t))+...,\end{gathered}\tag{2.4.3}$$

где $t=x/\mu,\varepsilon=\mu^{m+1},u_k(x)\in C^{(\infty)}[0,1],\pi_k(t)\in C^{(\infty)}[0,\mu_0],\mu_0=1/\mu$. Отметим, что функции $\pi_k(t)=\pi_k(t,\mu)$, т.е. является функцией двух переменных t и μ, но зависимость от μ не указываем. Это видно из уравнений, из которых определяются функции $\pi_k(t)$. Начальные условия для функций $\pi_j(t)$ берем в виде

$$\begin{gathered}\pi_{-1}(\mu_0)=\mu b,b=u^{(0)}-u_0(1)-\mu u_1(1)-\mu^2u_2(1)-...-\mu^n u_n(1)-...,\\ \pi_k(\mu_0)=0,k=0,1,2,...\end{gathered}$$

Подставляя (2.4.3) в (2.4.1) имеем

$$\left[\left[t\mu+\mu\pi_{-1}(t)+\mu^2\left(u_0(x)+\pi_0(t)\right)+\mu^3\left(u_1(x)+\pi_1(t)\right)+\mu^4\left(u_2(x)+\pi_2(t)\right)+\ldots\right]\times\left[\mu^{-2}\pi_{-1}(t)+\mu^{-1}\pi_0(t)+\right.\right.$$
$$\left.+\left(u_0'(x)+\pi_1'(t)\right)+\mu\left(u_1'(x)+\pi_2'(t)\right)+\mu^2\left(u_2'(x)+\pi_3'(t)\right)+\ldots+\right]+\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+u_0(x)+\pi_0(t)+$$
$$+\mu\left(u_1(x)+\pi_1(t)\right)+\mu^2\left(u_2(x)+\pi_2(t)\right)+\ldots+\mu^n\left(u_n(x)+\pi_n(t)\right)+\ldots=r(x)$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ получим:

$$\left(t+\pi_{-m}(t)\right)\pi'_{-m}(t)+\pi_{-1}(t)=0,\quad \pi_{-1}(\mu_0)=b\mu, \tag{2.4.4$_{-1}$}$$

$$Lu_0(x):=xu_0'(x)-q(x)u_0(x)=r(x), \tag{2.4.5$_0$}$$

$$\begin{gathered}D\pi_0(t):=\left(t+\pi_{-1}(t)\right)\pi_0'(t)+\left(\pi'_{-1}(t)+1\right)\pi_0(t)+u_0(t\mu)\pi'_{-1}(t)=0,\\ \pi_0(\mu_0)=0,\end{gathered} \tag{2.4.4$_0$}$$

$$Lu_1(x):=0, \tag{2.4.5$_1$}$$

$$\begin{gathered}D\pi_1(t):=\sum_{\substack{i+j=0\\ i,j\geq-1}}\pi_i(t)\pi_j'(t)+\sum_{\substack{i+j=0\\ 0\leq i\leq1,\,j\geq-1}}u_i(t)\pi_j'(t)+t\pi_1'(t)+\pi_1(t),\\ \pi_1(\mu_0)=0,\end{gathered} \tag{2.4.4$_1$}$$

$$Lu_2(x):=0, \tag{2.4.5$_2$}$$

$$\begin{gathered}D\pi_2(t):=\sum_{\substack{i+j=1\\ i,j\geq-1}}\pi_i(t)\pi_j'(t)+\sum_{\substack{i+j=1\\ 0\leq i\leq1,\,j\geq-1}}u_i(t)\pi_j'(t)+t\pi_2'(t)+\pi_2(t),\\ \pi_2(\mu_0)=0,\end{gathered} \tag{2.4.4$_2$}$$

$$Lu_3(x):=0, \tag{2.4.5$_3$}$$

$$D\pi_3(t)=\sum_{\substack{i+j=2\\ i\geq0,\,j\geq-1}}u_i(\mu t)\pi_j'(t)+\sum_{\substack{i+j=2\\ i,j\geq0}}\pi_i(t)\pi_j'(t)+t\pi_3'(t)+\pi_3(t),\quad \pi_3(\mu_0)=0, \tag{2.4.4$_3$}$$

$$Lu_4(x):=0, \tag{2.4.5$_4$}$$

$$D\pi_4(t)=\sum_{\substack{i+j=3\\ i\geq0,\,j\geq-1}}u_i(\mu t)\pi_j'(t)+\sum_{\substack{i+j=3\\ i,j\geq0}}\pi_i(t)\pi_j'(t)+t\pi_4'(t)+\pi_4(t),\quad \pi_4(\mu_0)=0, \tag{2.4.4$_4$}$$

$$Lu_5(x):=0, \tag{2.4.5$_5$}$$

$$D\pi_5(t)=\sum_{\substack{i+j=4\\ i\geq0,\,j\geq-1}}u_i(\mu t)\pi_j'(t)+\sum_{\substack{i+j=4\\ i,j\geq0}}\pi_i(t)\pi_j'(t)+t\pi_5'(t)+\pi_5(t),\quad \pi_5(\mu_0)=0, \tag{2.4.4$_5$}$$

$$Lu_6(x):=0, \tag{2.4.5$_6$}$$

$$D\pi_6(t)=\sum_{\substack{i+j=5\\ i\geq0,\,j\geq-1}}u_i(\mu t)\pi_j'(t)+\sum_{\substack{i+j=5\\ i,j\geq0}}\pi_i(t)\pi_j'(t)+t\pi_6'(t)+\pi_6(t),\quad \pi_6(\mu_0)=0, \tag{2.4.4$_6$}$$

……………………………………………………………………

$$Lu_{m-1}(x):=0, \tag{2.4.5$_{m-1}$}$$

$$D\pi_{m-1}(t)=\sum_{\substack{i+j=m-2\\ i\ge 0,\, j\ge -1}} u_i(\mu t)\pi'_j(t)+\sum_{\substack{i+j=m-2\\ i,\, j\ge 0}} \pi_i(t)\pi'_j(t)+t\pi'_{m-1}(t)+\pi_{m-1}(t), \quad \pi_{m-1}(\mu_0)=0, \tag{2.4.4$_{m-1}$}$$

$$Lu_m(x):=0, \tag{2.4.5$_m$}$$

$$D\pi_m(t):=-\frac{d[u_m(\mu t)\pi_{-m}(t)]}{dt}-\sum_{\substack{i+j=-1\\ i\in Z,\, k\ge 1-m}} \left(u_i(\mu t)+\pi_i(t)\right)\left(u'_j(\mu t)+\pi'_{j+1}(t)\right),$$

$$\pi_m(\mu_0)=0, \ \left(u_\nu(t)\equiv 0,\ \nu<0\right), \tag{2.4.4$_m$}$$

$$Lu_{m+1}(x):=0, \tag{2.4.5$_{m+1}$}$$

$$D\pi_{m+1}(t):=-\frac{d[u_{m+1}(\mu t)\pi_{-m}(t)]}{dt}-\sum_{\substack{i+j=0\\ i\in Z,\, k\ge 1-m}} \left(u_i(\mu t)+\pi_i(t)\right)\left(u'_j(\mu t)+\pi'_{j+1}(t)\right),$$

$$\pi_{m+1}(\mu_0)=0, \ \left(u_\nu(t)\equiv 0,\ \nu<0\right), \tag{2.4.4$_{m+1}$}$$

………………………………………………………………………..

Теперь будем решать эти задачи последовательно.

Теорема 1. При условии $b>0$ задача (2.4.4$_{-1}$) имеет единственное ограниченное положительное решение на отрезке $[0,\mu_0]=I$ и

$$\pi_{-1}(t)\le \frac{l}{t},\ \left|\pi_{-1}{}'(t)\right|\le \frac{l}{t^2}, \quad (t>0),$$

Здесь и далее постоянные не зависящие от малого параметра обозначим через $l, l_0, l_1, l_2, \ldots$.

Доказательство. Уравнение (2.4.4$_{-1}$) перепишем в виде

$$Qz:=(t+z)z'(t)+z=h(t,z),\ \ z(\mu_0)=b\mu, \tag{2.4.7}$$

где $h(t,z)=(m+q(\mu(t))z.$

Задача

$$Qz:=(t+z)z'(t)+z=0,\ \ z(\mu_0)=b\mu.$$

Имеет решение

$$t=c_0\xi^{-1}-\frac{\xi}{2}:=\psi(\xi,c_0), \tag{2.4.8}$$

где $c_0=b^1+b^2\dfrac{\mu^2}{2}, \quad \xi_0=\xi(0)=\left[2c_0\right]^{\frac{1}{2}}, \xi(\mu_0)=b\mu.$

Так, как $t'(\xi) < 0$ при $\xi \in [\xi_0, c_0]$, то существует единственная строго убывающая функция $\xi = \psi^{-1}(t, c_0) := \varphi(t, c_0), t \in [0, \mu_0]$.

Из (8) вытекает, что

$$\xi(t) < \frac{c_0}{t}, \quad (t > 0), \tag{2.4.9}$$

Решение задачи (7) ищем методом вариации постоянной Лагранжа, т.е. в виде

$$z = \varphi(t, c), \tag{2.4.10}$$

где $c = c(t)$.

Тогда подставляя (10) в (7) для $c(t)$ имеем уравнение

$$c'(t) = \frac{h(t, \varphi(t, c))}{(t + \varphi)\varphi_c(t, c(t))} = \frac{(m + q(\mu t))\varphi(t, c)}{(t + \varphi(t, c))\varphi_c(t, c(t))}. \tag{2.4.11}$$

Из (2.4.8)

$$c = t\varphi \ + \frac{\varphi^2}{2}.$$

Однако

$$\frac{\partial c}{\partial \varphi} = t + \varphi(t, c) = (t + \varphi). \tag{2.4.12}$$

Поэтому (2.4.11) можно записать в виде

$$c'(t) = (1 + q(\mu t))\frac{c}{t + \frac{\varphi}{2}}.$$

Отсюда, имеем

$$c = c_0 \exp\left\{2\int_{\mu_0}^{t} \frac{1 + q(\mu s)}{2s + \varphi(s, c(s))} ds\right\} := F(t, c).$$

Очевидно, что $\varphi(t,c_0)$ отображает отрезок $[0, \mu_0]$ на отрезок $[\xi_0, b\mu \ ]$.

Оператор $F(t,c)$ отображает отрезок $J = [c_0, c_0 l]$ в себя, где

$$J = c_0 \exp\left\{2\mu\int_0^{\mu_0} \frac{ls}{2s + l_0} ds\right\} \le c_0 e^l.$$

Здесь, мы использовали неравенство $|m + q(\mu t)| \le l\mu t$.

Теперь докажем, что оператор F является сжимающим в J. Имеем

$$\left|F(t,c_1)-F(t,c_2)\right|=\left|c_0\exp\{2\mu\int_{\mu_0}^{t}\frac{(1+q(\mu s))ds}{2s+\varphi(s,c_1(s))}\}-c_0\exp\{2\mu\int_{\mu_0}^{t}\frac{(1+q(\mu s))ds}{2s+\varphi(s,c_2(s))}\}\right|.$$

Применяя формулу Лагранжа, отсюда имеем

$$\left|F(t,c_1)-F(t,c_2)\right|\le l\int_{\mu_0}^{t}\mu s\frac{\left|\varphi(s,c_1(s))-\varphi(s,c_2(s))ds\right|}{\left[2s+\varphi(s,c_1(s))\right]\left[2s+\varphi(s,c_2(s))\right]}.$$

Теперь используя (2.4.12) получим

$$\left|F(t,c_1)-F(t,c_2)\right|\le l\mu\int_{t}^{\mu_0}\frac{s\left|c_1(s)-c_2(s)\right|ds}{\left(2s+c_0\right)^2(S+\varphi(s))}. \qquad (2.4.13)$$

Для функции $c_0(t)\in[c_0,c_0l]$ неравенство (2.4.9) выполняется, поэтому интеграл в правой части неравенства (2.4.13) разделив на два интеграла и оценивая, получим

$$\int_0^1\frac{s\left|c_1(s)-c_2(s)\right|ds}{\left(2s+c_0\right)^2(S+\varphi(s))}+\int_l^{\mu_0}\frac{s(s,c)\left|c_1(s)-c_2(s)\right|}{\left(2s+c_0\right)^2(S+\varphi(s))}ds\le$$

$$\le l\left\|c_1-c_2\right\|+l_1\left\|c_1-c_2\right\|\int_l^{\mu_0}\frac{sds}{\left(2s+c_0\right)^2(S+b\mu^m)}ds\le l_2\left\|c_1-c_2\right\|.$$

Таким образом,

$$\left|F(t,c_1)-F(t,c_2)\right|\le\mu l_3\left\|c_1-c_2\right\|$$

Поэтому F является сжимающим на отрезке J. Теорема доказана.

Задача для $\pi_0(t)$ имеет вид

$$D\pi_0(t)=\left(t+\pi_{-1}(t)\right)\pi_0'(t)+\left(u_0(x)+\pi_0(t)\right)\pi_{-1}'(t)+\pi_0(t),\quad \pi_0(\mu_0)=0. \qquad (2.4.14_0)$$

Для решения этой неоднородной задачи нам нужна следующая лемма.

Лемма 1. Однородное уравнение

$$D\xi(t):=(t+\pi_{-1}(t))\xi(t)+(\pi_{-1}(t)-q(\mu t))\xi=0,$$

имеет фундаментальное решение

$$\xi_0(t)=\exp\left\{\int_{\mu_0}^{t}\frac{q(\mu s)-\pi_{-1}'(s)}{s+\pi_{-1}(s)}ds\right\}=\frac{1+b\mu^2}{\mu(t+\pi_{-1}(t))}\exp\left\{-\int_{t}^{\mu_0}\frac{1+q(\mu s)}{s+\pi_{-1}(s)}ds\right\},$$

или

$$\xi_0(t)=\frac{1+b\mu^2}{\mu(t+\pi_{-1}(t))}X(t,\mu)\phi(t,\mu),$$

где

$$X(t,\mu)=\exp\{-\int_t^{\mu_0}\frac{1+q(\mu s)}{s+\pi_{-1}(s)}ds\}.$$

Из выражения $X(t,\mu)$ видно, $\|X(t,\mu)\|\le l, \|X^{-1}(t,\mu)\|\le l, |X'(t,\mu)|\le\frac{l_1}{t+\pi_{-1}(t)}\le l$.

Решение неоднородного уравнения (2.4.14$_0$) представляется в виде

$$\pi_0(t)=-\frac{1}{t+\pi_{-1}(t)}X(t,\mu)\phi(t,\mu)\int_t^{\mu_0}X(s,\mu)\phi(s,\mu)\frac{d[u_0(\mu s)\pi_{-1}(s)]}{ds}ds.$$

После интегрирования по частям и оценки имеем

$$|\pi_0(t)|\le M,\ t\in J;\ |\pi_0(t)|<\frac{L}{t^{m+1}},\quad |\pi_0'(t)|<\frac{L}{t^{m+2}},\quad (t>0) \qquad (2.4.15_0)$$

Таким образом доказали следующую лемму.

Лемма 2. Задача (2.4.14$_0$) имеет единственное ограниченное решение на отрезке $[0,\mu_0]$ и имеет место оценки (2.4.15$_0$).

Аналогично доказывается, что все уравнения (2.4.4$_к$) (к=1, 2, …) также имеют единственные решения из $C^{(\infty)}[0,\mu_0]$ и

$$|\pi_k(t)|\le L, |\pi_k(t)|\le\frac{L}{t^2},\quad |\pi_k'(t)|<\frac{L}{t^3}\quad (t>0).$$

Теперь для уравнений (2.4.5$_0$), (2.4.5$_1$), (2.4.5$_2$) нам потребуется следующая

Лемма 3.

$$Lg(x)=\gamma(x), \qquad (2.4.16)$$

где $\gamma(x)\in c^{(\infty)}[0,1]$ имеет единственное решение из класса $c^{(\infty)}[0,1]$ и оно представляется в виде

$$g(x)=x^{-1}p(x)\int_0^x p^{-1}(s)\gamma(s)ds,\ \ p(x)=\exp\left\{\int_1^x\frac{q(s)+1}{s}ds\right\}. \qquad (2.4.17)$$

Действительно, общее решение уравнения (16) имеет вид

$$g(x)=p(x)x^{-1}\left[g(1)+\int_1^x p^{-1}(s)\gamma(s)ds\right].$$

Если мы выберем $g(1)=-\int_0^1 p^{-1}(s)\gamma(s)ds$, то получим (2.4.17).

Из этой леммы 3 следует, что все уравнения ($2.4.5_0$), ($2.4.5_1$),… имеют единственные решения

$$u_k(x) \in c^{(\infty)}[0,1] \text{ и } u_k(x) \equiv 0, \quad k \neq \mod 2.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Пусть выполнено условие У 2.4. Тогда решение задачи (2.4.1) представимо в виде асимптотического ряда (2.4.3).

Доказательство. Оценка остаточного члена. Теперь докажем,что ряд (2.4.3) действительно является асимтотическим рядом, т.е. если ряд (2.4.3) представим в виде

$$\begin{aligned} u(x,\mu) &= \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + \pi_0(t) + u_0(x) + (\pi_1(t) + u_1(x))\mu + (\pi_2(t) + u_2(x))\mu^2 + \\ &+ \ldots + (\pi_n(t) + u_n(x))\mu^n + \mu^{n+1}U(x,\mu) + \mu^{n+1}\xi(t,\mu), \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

Для простоты, доказательство проведем для $n = -1$, т.е. для случая когдаимеет вид

$$u(x,\mu) = \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + U(x,\mu) + \xi(t,\mu), |U(x,\mu)| \le l,\ (x \in [0,1]),\ |\xi(t,\mu)| \le l,\ t \in [0,\mu_0]. \tag{2.4.19}$$

Доказательство. Подставляя (2.4.19) в уравнение (2.4.2) для $\pi_{-1}(t)$ имеем уравнение ($2.4.4_{-1}$), для $U(x,\mu)$ и $\xi(t,\mu)$ получаем уравнения:

$$LU(x,\mu) = r(x),\ U(x,\mu) \in C^{\infty}[0,1], \tag{2.4.20}$$

$$\begin{aligned} D\xi(t,\mu) &= -[\mu U(\mu t,\mu) + \mu\xi(t,\mu)]\frac{d\xi(t,\mu)}{dt} - \mu\frac{dU(\mu t,\mu)}{dt}\xi(t,\mu) - \\ &- \frac{dU(\mu t,\mu)}{dt}\pi_0(t) - U(\mu t,\mu)\pi_{-1}(t) - \mu U(\mu t,\mu)\frac{dU(\mu t,\mu)}{dt},\ \pi_0(\mu_0) = 0. \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

Уравнение(2.4.20) имеет решение $U(x,\mu) = u_0(x) \in C^{\infty}[0,1].$ Из (2.4.21) переходим в интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \xi(t,\mu) &= \frac{\phi(t,\mu)}{t + \pi_{-1}(t)}\int_t^{\mu_0} \phi^{-1}(s,\mu)[(\mu U(\mu s,\mu) + \mu\xi(s,\mu))\frac{d\xi(s,\mu)}{ds} + \mu\frac{dU(\mu s,\mu)}{ds}\xi(s,\mu) + \\ &+ \frac{dU(\mu s,\mu)}{ds}\pi_{-1}(s) + U(\mu t,\mu)\pi_{-1}(t) + \mu U(\mu s,\mu)\frac{dU(\mu s,\mu)}{ds}]ds. \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя первый член в подынтегральном выражении, получаем слабо возмущенное интегральное уравнение Вольтерра, которое имеет ограниченное решение на отрезке $J = [0,\mu_0].$ Теорема 2 доказана.

Пример 2.4.

$$\left(x+\varepsilon u(x)\right)u'(x)+u(x)=2x, \tag{2.4.21}$$

Уравнение

$$\pi_{-1}(t)\ \left(t+\pi_{-1}(t)\right)\pi'_{-1}(t)+\pi_{-1}(t)=0,$$

имеет решение вида

$$t=-\frac{1}{2}\pi_{-1}(t)+c_0\pi_{-1}^{-1}(t),\ c_0=b+b^2\frac{\mu^2}{2},\ \pi_{-1}(\mu_0)=b\mu.$$

А также уравнение

$$xu'(x)+u(x)=2x,$$

имеет регулярное решение

$$u_0(x)=x.$$

Уравнение для $\pi_0(t)$ имеет вид

$$\left(t+\pi_{-1}(t)\right)\pi'_0(t)+\left(\pi'_{-1}(t)+1\right)\pi_0(t)=-\mu t\pi'_{-1}(t),\ \pi_0\left(\tilde{\mu}\right)=0,\ \tilde{\mu}=1/\mu.$$

Решение этого уравнения представляется в виде

$$\pi_{-1}(t)=\frac{1}{t+\pi_{-1}(t)}\int_t^{\mu}X(t)X^{-1}(s)\pi'_{-1}(s)\mu s ds,$$

где

$$X(t)=\exp\left\{-\int_t^{\tilde{\mu}}\frac{ds}{s+\pi_{-1}(s)}ds\right\}.$$

Отсюда следует, что $\left|\pi_{-1}(t)\right|\le 1$.

Поэтому асимптотику решения задачи (2.4.21) можно записать в виде

$$u(x)=\frac{1}{\mu}\pi_{-1}(t)+x+\pi_0(t)+O(\mu),\ x=\mu t,\ \varepsilon=\mu^2.$$

§ 2.5 Случай, когда решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет полюс любого натурального порядка в регулярной особой точке

Пусть для уравнения (1.1.1) выполнено следующее условие У 2.5: $q(x),\ r(x)\in C^{(\infty)}[0,1],\ \ q_0=m\in N$.

Решение задачи (1.1.1)-(1.1.2) ищется в виде

$$u(x,\mu)=\mu^{-m}\pi_{-m}(t)+\mu^{-m+1}\pi_{-m+1}(t)+...+\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+u_0(x)+\pi_0(t)+\mu\big(u_1(x)+\pi_1(t)\big)+ \\ +\mu^2\big(u_2(x)+\pi_2(t)\big)+\mu^3\big(u_3(x)+\pi_3(t)\big)+...+\mu^n\big(u_n(x)+\pi_n(t)\big)+..., \quad (2.5.1)$$

где $t=x/\mu,\ \varepsilon=\mu^{m+1},\ u_k(x)\in C^{(\infty)}[0,1],\ \pi_k(t)\in C^{(\infty)}[0,\mu_0],\ \mu_0=1/\mu.$

Отметим, что функции $\pi_k(t)=\pi_k(t,\mu)$, т.е. является функцией двух переменных t и μ, но зависимость от μ не указываем. Это видно из уравнений, из которых определяются функции $\pi_k(t)$. Начальные условия для функций $\pi_j(t)$ берем в виде

$$\pi_{-m}(\mu_0)=\mu^m b, b=u^{(0)}-u_0(1)-\mu u_1(1)-\mu^2u_2(1)-...-\mu^n u_n(1)-..., \\ \pi_k(\mu_0)=0, k=-m+1,-m+2,...,0,1,2,... \quad (2.5.2)$$

Подставляя (2.5.1) в (1.1.1) имеем

$$\big[\mu(t+\pi_{-m}(t))+\mu^2\pi_{-m+1}(t)+\mu^3\pi_{-m+2}(t)+\mu^4\pi_{-m+3}(t)+...+\mu^{m-1}\pi_{-2}(t)+\mu^m\pi_{-1}(t)+\mu^{m+1}(u_0(x)+\pi_0(t))+ \\ +\mu^{m+2}(u_1(x)+\pi_1(t))+\mu^{m+3}(u_2(x)+\pi_2(t))+\mu^4(u_3(x)+\pi_3(t))+...\big]\cdot\big[\mu^{-m-1}\pi'_{-m}(t)-\mu^{-m}\pi'_{-m+1}(t)- \\ -\mu^{-m+1}\pi'_{-m+2}(t)-\mu^{-m+2}\pi'_{-m+3}(t)-....-\mu^{-2}\pi'_{-1}(t)+\mu^{-1}\pi'_0(t)+u'_0(x)+\pi'_1(t)+\mu(u'_1(x)+\pi'_2(t))+ \\ +\mu^2(u'_2(x)+\pi'_3(t))+\mu^3(u'_3(x)+\pi'_4(t))+...+\mu^n(u'_n(x)+\pi'_{n+1}(t))+...\big]=q(x)\big(u_0(x)+\mu u_1(x)+\mu^2u_2(x)+...\big)+ \\ +q(\mu t)\big(\mu^{-m}\pi_{-m}(t)+\mu^{-m+1}\pi_{-m+1}(t)+...+\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+\pi_0(t)+\mu\pi_1(t)+...\big)+r(x) \quad (2.5.3.)$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ получим:

$$\big(t+\pi_{-m}(t)\big)\pi'_{-m}(t)=q(\mu t)\pi_{-m}(t),\quad \pi_{-m}(\mu_0)=b\mu^m, \quad (2.5.4_{-m})$$

$$D\pi_{-m+1}(t):=\big(t+\pi_{-m}(t)\big)\pi'_{-m+1}(t)+\big(\pi'_{-m}(t)-q(\mu t)\big)\pi_{-m+1}(t)=0,\ \pi_{-m+1}(\mu_0)=0, \quad (2.5.4_{-m+1})$$

$$D\pi_{-m+2}(t):=-\pi_{-m+1}(t)\pi'_{-m+1}(t),\ \pi_{-m+2}(\mu_0)=0, \quad (2.5.4_{-m+2})$$

$$D\pi_{-m+3}(t):=-\pi_{-m+1}(t)\pi'_{-m+2}(t)-\pi_{-m+2}(t)\pi'_{-m+1}(t),\ \pi_{-m+3}(\mu_0)=0, \quad (2.5.4_{-m+3})$$

$$D\pi_{-m+4}(t) := -\sum_{\substack{k+j=4\\ k,j\in N}} \pi_{-m+k}(t)\pi'_{-m+j}(t), \qquad \pi_{-m+4}(\mu_0)=0, \tag{2.5.4$_{-m+4}$}$$

$$D\pi_{-m+5}(t) := -\sum_{\substack{k+j=5\\ k,j\in N}} \pi_{-m+k}(t)\pi'_{-m+j}(t), \qquad \pi_{-m+5}(\mu_0)=0, \tag{2.5.4$_{-m+5}$}$$

....

$$D\pi_{-1}(t) := -\sum_{\substack{k+j=m-1\\ k,j\in N}} \pi_{-m+k}(t)\pi'_{-m+j}(t), \qquad \pi_{-1}(\mu_0)=0, \tag{2.5.4$_{-1}$}$$

$$\begin{aligned} D\pi_0(t) &:= -\pi_{-m}(t)\frac{du_0(\mu t)}{dt} - u_0(\mu t)\pi'_{-m}(t) - \pi_{-m+1}(t)\pi'_{-1}(t) - \pi_{-m+2}(t)\pi'_{-2}(t) - \\ &-\pi_{-m+3}(t)\pi'_{-3}(t) - \ldots - \pi_{-2}(t)\pi'_{-m+2}(t) - \pi_{-1}(t)\pi'_{-m+1}(t), \qquad \pi_0(\mu_0)=0, \end{aligned} \tag{2.5.4$_0$}$$

$$Lu_0(x) := xu_0{}'(x) - q(x)u_0(x) = r(x), \tag{2.5.5$_0$}$$

$$\begin{aligned} D\pi_1(t) &:= -\pi_{-m}(t)\frac{du_1(\mu t)}{dt} - u_1(\mu t)\pi'_{-m}(t) - \pi_{-m+1}(t)\pi'_0(t) - \pi_{-m+2}(t)\pi'_{-1}(t) - \\ &-\pi_{-m+3}(t)\pi'_{-2}(t) - \ldots - \pi_{-2}(t)\pi'_{-m+3}(t) - \pi_{-1}(t)\pi'_{-m+2}(t) - \left(u_0(\mu t)+\pi_0(t)\right)\pi'_{-m+1}(t), \\ &\pi_0(\mu_0)=0, \end{aligned} \tag{2.5.4$_1$}$$

$$Lu_1(x) := 0, \tag{2.5.5$_1$}$$

$$\begin{aligned} D\pi_2(t) &:= -\frac{d}{dt}[\pi_{-m}(t)u_2(\mu t)] + \pi_{-m+1}(t)\pi'_1(t) - \pi_{-m+2}(t)\pi'_0(t) - \pi_{-m+3}(t)\pi'_{-1}(t) - \ldots - \\ &-\pi_{-2}(t)\pi'_{-m+4}(t) - \pi_{-1}(t)\pi'_{-m+3}(t) - \left(u_0(\mu t)+\pi_0(t)\right)\pi'_{-m+2}(t) - \left(u_1(\mu t)+\pi_1(t)\right)\pi'_{-m+1}(t), \\ &\pi_0(\mu_0)=0, \end{aligned} \tag{2.5.4$_2$}$$

$$Lu_2(x) := 0, \tag{2.5.5$_2$}$$

$$\begin{aligned} D\pi_3(t) &:= -\frac{d}{dt}[\pi_{-m}(t)u_3(\mu t)] - \sum_{\substack{k+j=3\\ k=3,4,\ldots,m+4\\ j=(-m+4,\ldots,0)}} \pi_{-m+k}(t)\pi'_j(t) - \\ &-\sum_{\substack{k+j=3\\ k\in N\\ j=0,1}} \left(u_j(x)+\pi_j(t)\right)\pi'_{-m+k}(t) \end{aligned} \tag{2.5.4$_3$}$$

$$Lu_3(x) := 0, \tag{2.5.5$_3$}$$

$$\begin{aligned} D\pi_4(t) &:= -\frac{d}{dt}[\pi_{-m}(t)u_4(\mu t)] + \sum_{k+j=4} \pi_{-m+k}(t)\pi'_j(t) \\ &-\sum_{\substack{k+j=4\\ k\in N\\ j=0,1}} \left(u_j(x)+\pi_j(t)\right)\pi'_{-m+k}(t), \quad \pi_4(\mu_0)=0, \end{aligned} \tag{2.5.4$_4$}$$

$$Lu_4(x) := 0, \tag{2.5.5$_4$}$$

$$D\pi_5(t) := -\frac{d[u_5(\mu t)\pi_{-m}(t)]}{dt} - \sum_{k+j=5} \pi_{-m+k}(t)\pi'_j(t) -$$
$$-\sum_{\substack{k+j=5\\ k\in N\\ j=0,1}} \left(u_j(x)+\pi_j(t)\right)\pi'_{-m+k}(t), \quad \pi_5(\mu_0)=0, \tag{2.5.4$_5$}$$

$$Lu_5(x) := 0, \tag{2.5.5$_5$}$$

$$D\pi_6(t) := -\frac{d[u_6(\mu t)\pi_{-m}(t)]}{dt} - \sum_{\substack{k+j=5-m\\ k\in Z,\, k\ge 1-m}} \left(u_k(\mu t)+\pi_k(t)\right)\left(u'_j(\mu t)+\pi'_{j+1}(t)\right),$$
$$\pi_6(\mu_0)=0, \tag{2.5.4$_6$}$$

$$Lu_6(x) := 0, \tag{2.5.5$_6$}$$

....

$$D\pi_{m-1}(t) := -\frac{d[u_{m-1}(\mu t)\pi_{-m}(t)]}{dt} - \sum_{\substack{k+j=-2\\ k\in Z,\, k\ge 1-m}} \left(u_k(\mu t)+\pi_k(t)\right)\left(u'_j(\mu t)+\pi'_{j+1}(t)\right),$$
$$\pi_{m-1}(\mu_0)=0, \tag{2.5.4$_{m-1}$}$$

$$Lu_{m-1}(x) := 0, \tag{2.5.5$_{m-1}$}$$

$$D\pi_m(t) := -\frac{d[u_m(\mu t)\pi_{-m}(t)]}{dt} - \sum_{\substack{k+j=-1\\ k\in Z,\, k\ge 1-m}} \left(u_k(\mu t)+\pi_k(t)\right)\left(u'_j(\mu t)+\pi'_{j+1}(t)\right),$$
$$\pi_m(\mu_0)=0, \ \left(u_\nu(t)\equiv 0,\ \nu<0\right), \tag{2.5.4$_m$}$$

$$Lu_m(x) := 0, \tag{2.5.5$_m$}$$

$$D\pi_{m+1}(t) := -\frac{d[u_{m+1}(\mu t)\pi_{-m}(t)]}{dt} - \sum_{\substack{k+j=0\\ k\in Z,\, k\ge 1-m}} \left(u_k(\mu t)+\pi_k(t)\right)\left(u'_j(\mu t)+\pi'_{j+1}(t)\right),$$
$$\pi_{m+1}(\mu_0)=0, \ \left(u_\nu(t)\equiv 0,\ \nu<0\right), \tag{2.5.4$_{m+1}$}$$

$$Lu_{m+1}(x) := 0, \qquad u_{m+1}(x)\in C^{(\infty)}[0,1], \tag{2.5.5$_{m+1}$}$$

....

$$D\pi_s(t) := -\frac{d[u_s(\mu t)\pi_{-m}(t)]}{dt} - \sum_{\substack{k+j=s-(m+1)\\ k\in Z,\, k\ge 1-m}} \left(u_k(\mu t)+\pi_k(t)\right)\left(u'_j(\mu t)+\pi'_{j+1}(t)\right),$$
$$\pi_s(\mu_0)=0, \ \left(u_\nu(t)\equiv 0,\ \nu<0\right), \tag{2.5.4$_s$}$$

$$Lu_s(x) := \begin{cases} 0, & s\ne (m+1)l,\ l\in N \\ -\sum\limits_{\substack{i+j=l-1\\ i\ge 0,\ j\ge 0}} u_i(x)u'_j(x), & s=(m+1)l, \end{cases} \qquad u_s(x)\in C^{(\infty)}[0,1], \tag{2.5.5$_s$}$$

……………………………………………………………………………

Теперь будем решать эти задачи последовательно.

Теорема 1. При условии $b>0$ задача (2.5.4m) имеет единственное ограниченное положительное решение на отрезке $[0,\mu_0]=I$ и $\pi_{-m}(t)\le\frac{l}{t^m}$, $\left|\pi_{-m}{}'(t)\right|\le\frac{l}{t^{m+1}}$, $(t>0)$.

Здесь и далее постоянные не зависящие от малого параметра обозначим через $l,l_0,l_1,l_2,\ldots.$.

Доказательство. Уравнение (2.5.4m) перепишем в виде

$$Qz:=(t+z)z'(t)+mz=h(t,z),\;\; z(\mu_0)=b\mu^m, \tag{2.5.7}$$

где $h(t,z)=(m+q(\mu(t))z.$

Задача

$$Qz:=(t+z)z'(t)+mz=0,\;\; z(\mu_0)=b\mu^m,$$

Имеет решение

$$t=c_0\xi^{-1/m}-\frac{\xi}{1+m}:=\psi(\xi,c_0), \tag{2.5.8}$$

где

$$c_0=b^{1/m}+b^{\frac{1+m}{m}}\frac{\mu^{m+1}}{1+m},\quad \xi_0=\xi(0)=\left[c_0(1+m)\right]^{\frac{m}{m+1}},\; \xi(\mu_0)=b\mu^m.$$

Так, как $t'(\xi)<0$ при $\xi\in\left[\xi_0,c_0\right]$, то существует единственная строго убывающая функция $\xi=\psi^{-1}(t,c_0):=\varphi(t,c_0),\, t\in\left[0,\mu_0\right]$.

Из (2.5.8) вытекает, что

$$\xi(t)<\frac{c_0^m}{t^m},\quad (t>0). \tag{2.5.9}$$

Решение задачи (2.5.7) ищем методом вариации постоянной Лагранжа, т.е. в виде

$$z=\varphi(t,c), \tag{2.5.10}$$

где $c=c(t)$.

Тогда подставляя (2.5.10) в (2.5.7) для $c(t)$ имеем уравнение

$$c'(t)=\frac{h(t,\varphi(t,c))}{(t+\varphi)\varphi_c(t,c(t))}=\frac{(m+q(\mu t))\varphi(t,c)}{(t+\varphi(t,c))\varphi_c(t,c(t))}. \qquad (2.5.11)$$

Из (2.5.8)

$$c=t\varphi^{1/m}+\frac{\varphi^{1+\frac{1}{m}}}{1+m}.$$

Однако

$$\frac{\partial c}{\partial\varphi}=\frac{1}{m}t\varphi^{\frac{(1-m)}{m}}(t,c)+\frac{\varphi^{\frac{1}{m}}(t,c)}{m}=\frac{1}{m}\frac{\varphi^{\frac{1}{m}}}{\varphi}(t+\varphi). \qquad (2.5.12)$$

Поэтому (2.5.11) можно записать в виде

$$c'(t)=\frac{1}{m}(m+q(\mu t))\frac{c}{t+\dfrac{\varphi}{1+m}}.$$

Отсюда, имеем

$$c=c_0\exp\left\{(m+1)\int_{\mu_0}^{t}\frac{m+q(\mu s)}{(m+1)s+\varphi(s,c(s))}ds\right\}:=F(t,c).$$

Очевидно, что $\varphi(t,c_0)$ отображает отрезок $[0,\mu_0]$ на отрезок $\left[\xi_0,b\mu^m\right]$.

Оператор $F(t,c)$ отображает отрезок $J=[c_0,c_0l]$ в себя, где

$$J=c_0\exp\left\{(m+1)\mu\int_0^{\mu_0}\frac{ls}{(m+1)s+l_0}ds\right\}\le c_0e^l,$$

Здесь, мы использовали неравенство $|m+q(\mu t)|\le l\mu t$.

Теперь докажем, что оператор F является сжимающим в J. Имеем

$$|F(t,c_1)-F(t,c_2)|=$$

$$=\left|c_0\exp\{(1+m)\mu\int_{\mu_0}^{t}\frac{(m+q(\mu s))ds}{(m+1)s+\varphi(s,c_1(s))}\}-c_0\exp\{(1+m)\mu\int_{\mu_0}^{t}\frac{(m+q(\mu s))ds}{(m+1)s+\varphi(s,c_2(s))}\}\right|.$$

Применяя формулу Лагранжа, отсюда имеем

$$|F(t,c_1)-F(t,c_2)|\le l\int_{\mu_0}^{t}\mu s\frac{|\varphi(s,c_1(s))-\varphi(s,c_2(s))ds|}{\left[(1+m)s+\varphi(s,c_1(s))\right]\left[(1+m)s+\varphi(s,c_2(s))\right]}.$$

Теперь используя (2.5.12) получим

$$|F(t,c_1)-F(t,c_2)|\le l\mu\int_{t}^{\mu_0}\frac{sm\varphi^{1-\frac{1}{m}}(s,c)|c_1(s)-c_2(s)|ds}{\left((1+m)s+c_0\right)^2(S+\varphi(s))}. \qquad (2.5.13)$$

Для функции $c_0(t)\in[c_0,c_0l]$ неравенство (2.5.9) выполняется, поэтому интеграл в правой части неравенства (2.5.13) разделив на два интеграла и оценивая, получим

$$\int_0^1 \frac{sm\varphi^{1-\frac{1}{m}}(s,c)\left|c_1(s)-c_2(s)\right|ds}{\left((1+m)s+c_0\right)^2(S+\varphi(s))}+\int_l^{\mu_0}\frac{sm\varphi^{1-\frac{1}{m}}(s,c)\left|c_1(s)-c_2(s)\right|}{\left((1+m)s+c_0\right)^2(S+\varphi(s))}ds\le$$

$$\le l\left\|c_1-c_2\right\|+l_1\left\|c_1-c_2\right\|\int_l^{\mu_0}\frac{sds}{\left((1+m)s+c_0\right)^2(S+b\mu^m)}ds\le l_2\left\|c_1-c_2\right\|.$$

Таким образом,

$$\left|F(t,c_1)-F(t,c_2)\right|\le \mu l_3\left\|c_1-c_2\right\|.$$

Поэтому F является сжимающим на отрезке J. Теорема доказана.

Задача для $\pi_0(t)$ имеет вид

$$D\pi_0(t)=-u_0(\mu t)\pi'_{-m}(t)-\frac{du_0(\mu t)}{dt}\pi_{-m}(t)\ ,\quad \pi_0(\mu_0)=0. \qquad (2.5.14_0)$$

Для решения этой неоднородной задачи нам нужна следующая лемма.

Лемма 1. Однородное уравнение

$$D\xi(t):=(t+\pi_{-m}(t))\xi(t)+(\pi_{-m}(t)-q(\mu t))\xi=0.$$

имеет фундаментальное решение

$$\xi_0(t)=\exp\left\{\int_{\mu_0}^{t}\frac{q(\mu s)-\pi'_{-m}(s)}{s+\pi_{-m}(s)}ds\right\}=\frac{1+b\mu^{m+1}}{\mu(t+\pi_{-m}(t))}\exp\left\{-\int_t^{\mu_0}\frac{1+q(\mu s)}{s+\pi_{-m}(s)}ds\right\},$$

или

$$\xi_0(t)=\frac{1+b\mu^{m+1}}{\mu(t+\pi_{-m}(t))}X(t,\mu)\phi(t,\mu),$$

где

$$X(t,\mu)=\exp\{-\int_t^{\mu_0}\frac{m+q(\mu s)}{s+\pi_{-m}(s)}ds\}\ ,\ \ \phi(t,\mu)=\exp\left\{(m-1)\int_t^{\mu_0}\frac{ds}{s+\pi_{-m}(s)}\right\}.$$

Из выражения $X(t,\mu)$ видно, $\left\|X(t,\mu)\right\|\le l,\left\|X^{-1}(t,\mu)\right\|\le l,\left|X'(t,\mu)\right|\le\dfrac{l_1}{t+\pi_{-m}(t)}\le l$.

Решение неоднородного уравнения $(2.5.14_0)$ представляется в виде

$$\pi_0(t)=-\frac{1}{t+\pi_{-m}(t)}X(t,\mu)\phi(t,\mu)\int_t^{\mu_0}X(s,\mu)\phi(s,\mu)\frac{d[u_0(\mu s)\pi_{-m}(s)]}{ds}ds\ .$$

После интегрирования по частям и оценки имеем

$$|\pi_0(t)| \le M,\ t \in J;\quad |\pi_0(t)| < \frac{L}{t^{m+1}},\quad |\pi_0'(t)| < \frac{L}{t^{m+2}},\quad (t > 0). \qquad (2.5.15_0)$$

Таким образом доказали следующую лемму.

Лемма 2. Задача ($2.5.14_0$) имеет единственное ограниченное решение на отрезке $[0, \mu_0]$ и имеет место оценки($2.5.15_0$).

Аналогично доказывается, что все уравнения ($2.5.4_к$) (к=1, 2, …) также имеют единственные решения из $C^{(\infty)}[0, \mu_0]$ и

$$|\pi_k(t)| \le L, |\pi_k(t)| \le \frac{L}{t^{m+1}},\quad |\pi_k'(t)| < \frac{L}{t^{m+1}}\quad (t > 0).$$

Теперь для уравнений ($2.5.5_0$), ($2.5.5_1$), ($2.5.5_2$) нам потребуется следующая

Лемма 3./

$$Lg(x) = \gamma(x), \qquad (2.5.16)$$

где $\gamma(x) \in c^{(\infty)}[0,1]$ имеет единственное решение из класса $c^{(\infty)}[0,1]$ и оно представляется в виде

$$g(x) = x^{-m} p(x) \int_0^x x^{m-1} p^{-1}(s)\gamma(s)ds,\ \ p(x) = \exp\left\{ \int_1^x \frac{q(s)+m}{s} ds \right\}, \qquad (2.5.17)$$

Действительно, общее решение уравнения (2.5.16) имеет вид

$$g(x) = p(x)x^{-m}\left[g(1) + \int_1^x s^{m-1} p^{-1}(s)\gamma(s)ds \right].$$

Если мы выберем $g(1) = -\int_0^1 s^{m-1} p^{-1}(s)\gamma(s)ds$, то получим (2.5.17).

Из этой леммы 3 следует, что все уравнения ($2.5.5_0$), ($2.5.5_1$),… имеют единственные решения

$$u_k(x) \in c^{(\infty)}[0,1] \text{ и } u_k(x) \equiv 0,\quad k \ne \operatorname{mod} m.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Пусть выполнено условие $U: q(x), r(x) \in c^{(\infty)}[0,1]$, $q(0) = m$ - некоторое целое число и $b = u^0 - \int_0^1 s^{m-1} \exp\left\{ \int_s^1 \frac{q(\tau)+m}{\tau} d\tau \right\} ds > 0$. Тогда, задача (1.1.1) имеет единственное решение и ее асимптотика представляется в виде (2.5.3).

Доказательство. Оценка остаточного члена. Теперь докажем,что ряд (2.5.3) действительно является асимтотическим рядом, т.е. если ряд (2.5.3) представим в виде

$$u(x,\mu)=\mu^{-m}\pi_{-m}(t)+\mu^{-m+1}\pi_{-m+1}(t)+\ldots+\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+u_0(x)+\pi_0(t)+\mu(u_1(x)+\pi_1(t))+$$

$$+\mu^2\left(u_2\left(x\right)+\pi_2\left(t\right)\right)+\mu^3\left(u_3\left(x\right)+\pi_3\left(t\right)\right)+\ldots+\mu^n\left(u_n\left(x\right)+\pi_n\left(t\right)\right)+$$
$$+\mu^{n+1}U(x,\mu)+\mu^{n+1}\xi(t,\mu), \qquad (2.5.18)$$

тогда $|U(x,\mu)|\le l,\ (x\in[0,1]),\ |\xi(t,\mu)|\le l,\ t\in[0,\mu_0].$

Для простоты, доказательство проведем для $n=-1$, т.е. для случая когдаимеет вид

$$u\left(x,\mu\right)=\mu^{-m}\pi_{-m}\left(t\right)+U\left(x,\mu\right)+\xi\left(t,\mu\right),|U(x,\mu)|\le l,\ (x\in[0,1]),\ |\xi(t,\mu)|\le l,\ t\in[0,\mu_0]. \qquad (2.5.19)$$

Доказательство. Подставляя (2.5.19)в уравнение (2.5.2) для $\pi_{-m}(t)$ имеем уравнение (2.5.4$_{-m}$), для $U(x,\mu)$ и $\xi(t,\mu)$ получаем уравнения:

$$LU\left(x,\mu\right)=r(x),\ U(x,\mu)\in C^{\infty}[0,1], \qquad (2.5.20)$$

$$D\xi(t,\mu)=-[\mu^m\,U(\mu t,\mu)+\mu^m\xi(t,\mu)]\frac{d\xi(t,\mu)}{dt}-\mu^m\,\frac{dU(\mu t,\mu)}{dt}\xi(t,\mu)-$$
$$-\frac{dU(\mu t,\mu)}{dt}\pi_{-m}(t)-U(\mu t,\mu)\pi_{-m}(t)-\mu^m U(\mu t,\mu)\frac{dU(\mu t,\mu)}{dt},\ \pi_{-m}(\mu_0)=0. \qquad (2.5.21)$$

Уравнение(2.5.20) имеет решение $U\left(x,\mu\right)=u_0(x)\in C^{\infty}[0,1].$ Из (2.5.21) переходим в интегральное уравнение

$$\xi(t,\mu)=\frac{\phi(t,\mu)}{t+\pi_{\_}(t)}\int_t^{\mu_0}\phi^{-1}(s,\mu)[(\mu^m\,U(\mu s,\mu)+\mu^m\xi(s,\mu))\frac{d\xi(s,\mu)}{ds}+\mu^m\,\frac{dU(\mu s,\mu)}{ds}\xi(s,\mu)+$$
$$+\frac{dU(\mu s,\mu)}{ds}\pi_{-m}(s)+U(\mu t,\mu)\pi_{-m}(t)+\mu^m U(\mu s,\mu)\frac{dU(\mu s,\mu)}{ds}]ds$$

Отсюда, интегрируя первый член в подынтегральном выражении, получаем слабо возмущенное интегральное уравнение Вольтерра, которое имеет ограниченное решение на отрезке $J=[0,\mu_0].$ Теорема 2 доказана.

Пример 2.5

$$\left(x+\varepsilon u\left(x\right)\right)u'\left(x\right)+mu\left(x\right)=\beta x,\ u\left(1\right)=b. \qquad (2.5.21)$$

Уравнение

$$\left(t+\pi_{-1}\left(t\right)\right)\pi'_{-1}\left(t\right)+m\pi_{-1}\left(t\right)=0,$$

имеет решение вида

$$t = \frac{1}{m+1}\pi_{-1}(t) + c_0\pi_{-1}^{-1/m}(t), \quad c_0 = b^{1/m} + b^{\frac{1+m}{m}}\frac{\mu^{m+1}}{1+m}, \quad \pi_{-1}(\mu_0) = b\mu^m.$$

А также уравнение

$$xu'(x) + mu(x) = \beta x,$$

имеет регулярное решение

$$u_0(x) = \frac{\beta}{1+m}x.$$

Уравнение для $\pi_0(t)$ имеет вид

$$\left(t+\pi_{-1}(t)\right)\pi_0'(t) + \left(\pi_{-1}'(t)+m\right)\pi_0(t) = -m\mu^{m+1}t\pi_{-1}'(t), \ \pi_0\left(\mu\right) = 0, \ \mu = 1/\mu^{m+1}.$$

Решение этого уравнения представляется в виде

$$\pi_{-1}(t) = \frac{m}{\left(t+\pi_{-1}(t)\right)}\int_t^{\mu} X(t)\,X^{-1}(s)\,\pi_{-1}'(s)\,\mu^{m+1}s\,ds,$$

где

$$X(t) = \exp\left\{-m\int_t^{\mu}\frac{ds}{s+\pi_{-1}(s)}ds\right\}.$$

Отсюда следует, что $\left|\pi_{-1}(t)\right| \le m$.

Поэтому асимптотику решения задачи (2.5.21) можно записать в виде

$$u(x) = \frac{1}{\mu}\pi_{-1}(t) + \frac{\beta}{1+m}x + \pi_0(t) + O(\mu), \ x = \mu^m t, \ \varepsilon = \mu^{m+1}.$$

§ 2.6 **Случай, когда решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет полюс рационального (больше единицы) порядка в регулярной особой точке**

Пусть для уравнения (1.1.1) выполнено следующее условие У 2.6: $q(x), \ r(x) \in C^{(\infty)}[0,1], \ q_0 = p/q; \ p > q; \ p,q \in N$.

Здесь рассматривается случай $q_0 = p/q$.

Решение задачи (1.1.1)-(1.1.2) ищем в виде

$$u(x) = \mu^{-m-1}\pi_{-m-1}(t) + \mu^{-m}\pi_{-m}(t) + \mu^{-m+1}\pi_{-m+1}(t) + \ldots + \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\pi_n(t) + u_n(t)\right)\mu^n,$$

$$t = x/\mu^q, \ \varepsilon = \mu^{p+q}, \tag{2.6.3}$$

где $u_k(x)\in C^{(\infty)}[0,1]$, $\pi_k(t)\in C^{(\infty)}[0,1]$, $\mu_0=\mu^{-m}$. Отметим, что, $\pi_k(t)=\pi_k(t,\mu)$, т.е. $\pi_k(t)$ зависит также от μ, но эту зависимость мы не указываем.

Начальные условия для функций $\pi_j(t)$ берем в виде:

$$\pi_{-p}(1/\mu)=b\mu^p,\ b=u^{(0)}-\sum_{n=0}^{\infty}\mu^n\cdot u_n(1),\ \pi_k(\mu_0)=0,\ (k=-p,-p+1,\ldots 2,-1,0,1,\ldots)\qquad(2.6.4)$$

Подставляя (4 в (3) имеем:

$$\left(x+\mu\pi_{-p}(t)+\mu^2\pi_{-p}(t)+\ldots+\mu^p\pi_{-1}(t)+\sum_{n=0}^{\infty}(\pi_n(t)+u_n(x))\mu^{n+p+1}\right)\times$$
$$\times\left(\mu^{-p-1}\cdot\pi'_{-p}(t)+\mu^{-p}\cdot\pi'_{-p+1}(t)+\ldots+\mu^{-2}\cdot\pi'_{-1}(t)+\sum_{n=0}^{\infty}\mu^n\left(\mu_0\cdot\pi'_n(t)+u'_n(x)\right)\right)+$$
$$+\frac{p}{q}\sum_{n=0}^{\infty}\mu^n u_n(x)+\frac{p}{q}\sum_{n=-m-1}^{\infty}\mu^n\pi_n(t)=r(x),$$

Отсюда, для определения функций $\pi_k(t)$ $(k=-p,-p+1,\ldots,-1,0,1,\ldots)$, $u_n(x)$ $(n=0,1,2\ldots)$, имеем следующие уравнения:

$$(t+\pi_{-p}(t))\pi'_{-p}(t)+\frac{p}{q}\pi_{-p}(t),\quad \pi_{-p}(\mu_0)=b\mu^p\qquad(2.6.5_{-p})$$

$$D\pi_{-p+1}(t):=(t+\pi_{-p}(t))\pi'_{-p+1}(t)+\left(\pi'_{-p}(t)+\frac{p}{q}\right)\pi_{-p+1}(t)=0,\quad \pi_{-p+1}(\mu_0)=0\qquad(2.6.5_{-p+1})$$

…………………………………………………………………

$$D\pi_p(t):=(t+\pi_{-p-1}(t))u'_{p-1}(\mu t)+\sum_{\substack{i+j=-1\\ i\in Z,i\geq 1-p}}(\pi_{-i}(t)+u_i(\mu t))\pi'_j(t),\quad \pi_p(\mu_0)=0,\qquad(2.6.5_p)$$

…………………………………………………………………

а также,

$$Lu_0(x):=xu'_0(x)-q(x)u_0(x)=r(x),\quad u_0(x)\in C^{(\infty)}[0,1]\qquad(2.6.6_0)$$

$$Lu_1(x)=0,\quad u_1(x)\in C^{(\infty)}[0,1],\qquad(2.6.6_1)$$

$$Lu_2(x):=0,\quad u_2(x)\in C^{(\infty)}[0,1]\qquad(2.6.6_2)$$

$$Lu_3(x):=0,\quad u_3(x)\in C^{(\infty)}[0,1],\qquad(2.6.6_3)$$

…………………………………………………………………

$$Lu_p(x):=0,\quad u_n(x)\in C^{(\infty)}[0,1],\qquad(2.6.6_p)$$

…………………………………………………………………

Теперь будем решать эти задачи последовательно.

Теорема 1. При условии $b>0$ уравнение $(2.6.5_{-p})$ имеет единственное ограниченное решение на отрезке $[0,\mu_0]=I$ и $\pi_{-p}(t)\leq t^{-p}$, $|\pi'_{-p}(t)|\leq t^{-p-1}$.

В дальнейшем постоянные не зависящие от малого параметра обозначим через $l,l_0,l_{1,\ldots}$

Доказательство. Уравнение $(2.6.5_{-p})$ запишем в виде

$$Qz:=(t+z)z'(t)+\frac{p}{q}z=h(t,z),\quad z(\mu_0)=b\mu^p,\qquad(2.6.7)$$

где $h(t,z)=(q(\mu t)+p/q)z$.

Решение задачи

$$Qz := (t+\xi)\xi'(t) + p\xi/q = 0, \quad \xi(\mu_0) = b\mu^p, \tag{2.6.8}$$

запишется в виде

$$t = c_0\xi^{-q/p} - q\xi/(q+p) := \psi(\xi, c_0), \tag{2.6.9}$$

причем $c_0 = b^{q/p} + \dfrac{q}{p+q}\left(b^{\frac{q}{p+q}}\mu^{\frac{q}{p}}\right)^{p+q}$, $\xi_0 = \xi(0) = \left(\dfrac{p+q}{p}c_0\right)^{\frac{p}{p+q}}$, $\xi(\mu_0) = b\mu^p$. Функция (2.6.9) строго убывающая положительная функция на отрезке $t \in [0, \mu_0]$ при малом $\mu > 0$. Из (2.6.9) имеем $\xi = \psi(t, c)$.

Так как $t'(\xi) < 0$ при $\xi \in [\xi_0, c_0]$, то существует единственная строго убывающая функция $\xi = \psi^{-1}(t, c_0) := \varphi(t, c_0)$, $\xi \in [0, \mu_0]$.

Решение задачи (2.6.8) будем искать методом вариации Лагранжа, т.е. в виде

$$z = \varphi(t, c), \text{ где } c = c(t) \tag{2.6.10}$$

Подставляя (2.6.10) в (2.6.7) для $c(t)$ имеем уравнение

$$c'(t) = \frac{h(t, \varphi(t, c(t)))}{(t+\varphi)\varphi_c(t, c(t))} = \frac{(p/q + q(\mu t))\varphi(t, c(t))}{(t+\varphi)\varphi_c(t, c(t))}. \tag{2.6.11}$$

Из (2.6.8)

$$c = t\varphi^{q/p} + \frac{q}{q+p}\varphi^{(p+q)/q}.$$

поэтому

$$\begin{aligned} c'(t) &= \frac{q}{p}\left(\frac{p}{q} + q(\mu t)\right)\varphi^{-\frac{p-q}{p}}(t, c) = \frac{q}{p}\left(\frac{p}{q} + q(\mu t)\right)\frac{\varphi^{\frac{q}{p}}(t, c)}{c}c = \\ &= \frac{q}{p}\left(\frac{p}{q} + q(\mu t)\right)\frac{c}{t + \dfrac{q\varphi}{p+q}}. \end{aligned} \tag{2.6.12}$$

Отсюда, имеем

$$c = c_0 \exp\left\{\frac{p+q}{p}\int_{\mu_0}^{t} \frac{p/q + q(\mu s)}{(p+q)s/q + \varphi(s, c(s))}ds\right\} := F(t, c).$$

Очевидно, что $\varphi(t, c_0)$ отображает отрезок $[0, \mu_0]$ на отрезок $\left[\xi_0, b\mu^{p/q}\right]$. Оператор $F(t, c)$ отображает отрезок $J = [c_0, c_0 l]$ в себя, где

$$J = c_0 \exp\left\{\frac{p}{q}\mu\int_0^{\mu_0} \frac{ls}{(p+q)s/q + l_0}ds\right\} \le c_0 e^l,$$

Здесь, мы использовали неравенство $|p/q + q(\mu t)| \le l\mu t$.

Теперь докажем, что оператор F является сжимающим в J. Имеем

$$|F(t, c_1) - F(t, c_2)| =$$

$$= \left|c_0 \exp\left\{\frac{p+q}{q}\mu\int_{\mu_0}^{t} \frac{\left(\dfrac{p}{q} + q(\mu s)\right)ds}{\dfrac{p+q}{q}s + \varphi(s, c_1(s))}\right\} - c_0 \exp\left\{\frac{p+q}{q}\mu\int_{\mu_0}^{t} \frac{\left(\dfrac{p}{q} + q(\mu s)\right)ds}{\dfrac{p+q}{q}s + \varphi(s, c_2(s))}\right\}\right|.$$

Применяя формулу Лагранжа и (2.6.12) , отсюда имеем

$$\left|F(t,c_1)-F(t,c_2)\right|\le l\mu\int_t^{\mu_0}\frac{\frac{p}{q}s\varphi^{-\frac{p-q}{p}}(s,c)\left|c_1(s)-c_2(s)\right|ds}{\left(\frac{p+q}{q}s+c_0\right)^2(S+\varphi(s))}. \qquad (2.6.13)$$

Для функции $c_0(t)\in[c_0,c_0l]$ неравенство (2.6.9) выполняется, поэтому интеграл в правой части неравенства (2.6.13) разделив на два интеграла и оценивая, получим

$$|F(t,c_1)-F(t,c_2)|\le \mu l_3\|c_1-c_2\|$$

Поэтому F является сжимающим на отрезке J. Теорема доказана.

Задача для $\pi_0(t)$ имеет вид

$$D\pi_0(t)=-u_0(\mu t)\pi'_{-p-1}-\frac{du_0(\mu t)}{dt}\pi_{-p-1}(t),\ \ \pi_0(\mu_0)=0, \qquad (2.6.14_0)$$

Для решения этой неоднородной задачи нам нужна следующая лемма.

Лемма. Однородное уравнение

$$D\xi(t):=(t+\pi_{-p}(t))\xi(t)+(\pi_{-p}(t)+\frac{p}{q})\xi=0,$$

имеет фундаментальное решение

$$\xi_0(t)=\exp\left\{\int_{\mu_0}^{t}\frac{q(\mu s)-\pi'_{-p}(s)}{s+\pi_{-p}(s)}ds\right\}=\frac{1+b\mu^{(p+q)/q}}{\mu\left(t+\pi_{-p}(t)\right)}\exp\left\{-\int_t^{\mu_0}\frac{q(\mu s)+1}{s+\pi_{-p}(s)}ds\right\},$$

или

$$\xi_0(t)=\frac{1+b\mu^{(p+q)/q}}{\mu\left(t+\pi_{-p}(t)\right)}X(t,\mu)\phi(t,\mu),$$

где

$$X(t)=\exp\left\{-\int_t^{\mu_0}\frac{(p+q)/q+q(\mu s)}{s+\pi_{-p}(s)}ds\right\},\ \phi(t,\mu)=\exp\left\{\frac{p-q}{q}\int_t^{\mu_0}\frac{ds}{s+\pi_{-p}(s)}\right\}.$$

Решение неоднородного уравнения ($2.6.14_0$) представляется в виде

$$\pi_0(t)=-\frac{1}{t+\pi_{-p}(t)}X(t,\mu)\phi(t,\mu)\int_t^{\mu_0}X(s,\mu)\phi(s,\mu)\frac{d\left[u_0(\mu s)\pi_{-p}(s)\right]}{ds}ds,$$

Отсюда,имеем

$$\left|\pi_0(t)\right|\le l,\quad t\in J;\quad \left|\pi_0(t)\right|<\frac{l}{t^{p+1}},\quad \left|\pi'_0(t)\right|<\frac{l}{t^{p+2}},\quad (t>0). \qquad (2.6.15_0)$$

Таким образом доказали следующую лемму.

Лемма 2. Задача ($2.6.14_0$) имеет единственное ограниченное решение на отрезке $[0,\mu_0]$ и имеет место оценки ($2.6.15_0$).

Аналогично доказывается, что все уравнения ($2.6.5_к$) (к=1, 2, …) также имеют единственные решения из $C^{(\infty)}[0,\mu_0]$ и

$$|\pi_k(t)|\le l,\ |\pi_k(t)|<\frac{l}{t^{p+1}},\ |\pi'_k(t)|<\frac{l}{t^{p+2}},\ (t>0).$$

Теперь для уравнений ($2.6.5_0$), ($2.6.5_1$), ($2.6.5_2$) нам потребуется следующая

Лемма 3.

$$Lg(x) = \gamma(x)\,, \tag{2.6.16}$$

где $\gamma(x) \in C^{(\infty)}[0,1]$ имеет единственное решение из класса $C^{(\infty)}[0,1]$ и оно представляется в виде

$$g(x) = x^{-p/q} p(x) \int_0^x x^{(p-q)/q} p^{-1}(s)\gamma(s)ds,\ \ p(x) = \exp\left\{\int_1^x \frac{q(s)+p/q}{s} ds\right\}, \tag{2.6.17}$$

Действительно, общее решение уравнения (2.6.16) имеет вид

$$g(x) = p(x)x^{-p/q}\left[g(1) + \int_1^x s^{(p-q)/q} p^{-1}(s)\gamma(s)ds\right].$$

Если мы выберем $g(1) = -\int_0^1 s^{(p-q)/q} p^{-1}(s)\gamma(s)ds$, то получим (2.6.17).

Из этой леммы 3 следует, что все уравнения (2.6.5$_0$), (2.6.5$_1$),… имеют единственные решения $u_k(x) \in c^{(\infty)}[0,1]$ и $u_k(x) \equiv 0,\ k \neq \mathrm{mod}(q+1)$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2.7 Пусть выполнено условие $U: q(x), r(x) \in C^{(\infty)}[0,1],\ \ q(0) = p/q$ и $b = u^0 - \int_0^1 s^{(p-q)/q} \exp\left\{\int_s^1 \frac{q(\tau)+p/q}{\tau} d\tau\right\} ds > 0$. Тогда, задача (1.1.1) имеет единственное решение и ее асимптотика представляется в виде (2.6.3).

Пример 2.6

$$\left(x + \varepsilon u(x)\right)u'(x) + \frac{p}{q}u(x) = x,\ u(1) = b,\ p > q. \tag{2.6.21}$$

Уравнение

$$\left(t + \pi_{-1}(t)\right)\pi'_{-1}(t) + m\pi_{-1}(t) = 0,$$

имеет решение вида

$$t = \frac{q}{p+q}\pi_{-1}(t) + c_0\pi_{-1}^{-q/p}(t)\,,\ \ c_0 = b^{q/p} + \frac{q}{p+q} b^q \mu^{\frac{q(p+q)}{p}},\ \pi_{-1}(\mu_0) = b\mu^p.$$

А также уравнение

$$xu'(x) + \frac{p}{q}u(x) = x,$$

имеет регулярное решение

$$u_0(x) = \frac{q}{p+q}x.$$

Уравнение для $\pi_0(t)$ имеет вид

$$\left(t + \pi_{-1}(t)\right)\pi'_0(t) + \left(\pi'_{-1}(t) + \frac{p}{q}\right)\pi_0(t) = -\frac{q}{p+q}\mu^q t\pi'_{-1}(t),\ \ \pi_0\left(\overset{\square}{\mu}\right) = 0,\ \ \overset{\square}{\mu} = 1/\mu^q,\ p > q,$$

Решение этого уравнения представляется в виде

$$\pi_{-1}(t) = \frac{q}{(p+q)\left(t+\pi_{-1}(t)\right)} \int_t^{\mu} X(t) X^{-1}(s) \pi'_{-1}(s) \mu^2 s ds,$$

где

$$X(t) = \exp\left\{ -\frac{p}{q} \int_t^{\mu} \frac{ds}{s+\pi_{-1}(s)} ds \right\}.$$

Отсюда следует, что $\left|\pi_{-1}(t)\right| \le \dfrac{q}{p+q}$.

Поэтому асимптотику решения задачи (2.6.21) можно записать в виде

$$u(x) = \frac{1}{\mu}\pi_{-1}(t) + \frac{q}{p+q}x + \pi_0(t) + O(\mu), \; x = \mu^q t, \; \varepsilon = \mu^{p+q}.$$

§2.7 **Заключение ко второй главе.**

В данной главе разработан аналог метода погранфункций и с помощью этого метода построены равномерные асимптотические разложения решения сингулярно возмущенного уравнения Лайтхилла первого порядка, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет:

- логарифмический рост в регулярной особой точке;

- полюс порядка одна вторая в регулярной особой точке;

- полюс рационального порядка (меньше единицы) в регулярной особой точке;

- полюс любого натурального порядка в регулярной особой точке;

- полюс рационального порядка (большего единицы) в регулярной особой точке.

Оценка остаточных членов являются более точными, чем в методе структурного сращивания.

ГЛАВА 3. НОВЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РАВНОМЕРНОЙ АСИМПТОТИКИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАЙТХИЛЛА

§ 3.1 Случай, когда решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет полюс первого порядка в регулярной особой точке

Теперь ставим для (1.1.1) следующую задачу

$$u(0) = a. \tag{3.1.2}$$

Поэтому в уравнении (1.1.1) сделаем подстановку:

$$x = \mu t, y(x) = \frac{1}{\mu} u(t), \ \mu^2 = t. \tag{3.1.3}$$

Тогда оно имеет вид:

$$(t + u(t))u'(t) = q(\mu t)u(t) + \mu r(\mu t), \, t \in \left[0, \tilde{\mu}\right], \ \tilde{\mu} = \mu^{-1}, \tag{3.1.4}$$

$$u(0) = \mu a. \tag{3.1.5}$$

Решение задачи (8)-(9) ищем в виде

$$u(t) = u_0(t) + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t) + ..., \tag{3.1.6}$$

где функции $u_k(t) = u_k(t, \mu)$ и зависимость от малого параметра μ, для простоты не указываем.

Подставляя (3.1.6) в (3.1.4):

$$\left(t + u_0(t) + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t) + ...\right)\left(u_0'(t) + \mu u_1'(t) + \mu^2 u_2'(t) + ...\right) =$$
$$= q(\mu t)\left(u_0(t) + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t) + ...\right) + \mu r(\mu t),$$

Отсюда имеем

$$(t + u_0(t))u_0'(t) = q(\mu t)u_0(t), u_0(0) = \mu a, \tag{3.1.7$_0$}$$

$$Lu_1(t) = (t + u_0(t))u_1'(t) + (u_0'(t) - q(\mu t)u_1(t)) = r(\mu t), \ u_1(0) = 0, \tag{3.1.7$_1$}$$

$$Lu_2(t) = -u_1(t)u_1'(t), \ u_2(0) = 0, \tag{3.1.7$_2$}$$

………………………………………………………………

$$Lu_n(t) = -\sum_{\substack{i+k=n \\ i,k\geq 1}} u_i(t)u_k'(t), \ u_n(0) = 0, \tag{3.1.7$_n$}$$

………………………………………………………………

Теперь решим задачу (3.1.7$_1$). Невозмущенное дифференциальное уравнение (3.1.7$_1$):

$$(t + z_0(t))z_0'(t) = -z_0(t),$$

имеет общее решение

$$z_0(t) = -t + \sqrt{t^2 + C^2},$$

где *C*- произвольная постоянная.

Решение задачи (3.1.7$_1$) будем искать методом вариации постоянных Лагранжа, тогда получим

$$c(t) = \mu a + \int_0^t \left(1 + q(\mu s)\right)\left(-s + \sqrt{s^2 + c^2(s)}\right) ds. \qquad (3.1.8)$$

Справедлива,

Теорема 1. Решение уравнения (1.1.2) существует и единственна на отрезке $\left[0, \overset{\square}{\mu}\right]$ и справедлива оценка

$$\frac{1}{2}\mu a \le C(t) \le 2\mu a. \qquad (3.1.9)$$

Эта теорема доказывается использованием принципа сжимающих отображений.

Фундаментальное решение уравнения $Lu_1(t) = 0$ имеет вид:

$$\Phi(t) = \frac{\mu a \psi(t)}{t + u_0(t)},$$

где

$$\psi(t) = \exp\left\{\int_0^t \frac{1 + q(\mu s)}{s + u_0(s)} ds\right\}.$$

Лемма 1. $|\Phi(t)| \le l, \ \forall t \in \left[0, \mu^{-1}\right]$.

Здесь и далее постоянную независимую переменную от малого параметра μ обозначим через l.

Лемма 2. Неоднородная задача

$$Lz(t) = g(t), \ z(0) = 0,$$

где $g(t)$-непрерывная ограниченная функция на отрезке $\left[0, \overset{\square}{\mu}\right]$ имеет единственное ограниченное решение, т.е.

$$|z(t)| \le l, \ \forall t \in \left[0, \overset{\square}{\mu}\right].$$

Доказательство это леммы следует из формулы

$$z(t) = \frac{1}{t + u_0(t)} \int_0^t \psi^{-1}(s) g(s) ds.$$

Лемма 3. Задача ($3.1.7_n$) имеет единственное ограниченное решение для любого $\left[0, \overset{\square}{\mu}\right]$, т.е.

$$|u_n(t)| \le l, \ \forall n \in N.$$

Справедлива,

Теорема 2. Ряд (3.1.6) является асимптотическим рядом на отрезке $\left[0, \overset{\square}{\mu}\right]$, т.е.

$$u(t) = u_0(t) + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t) + \ldots \mu^n u_n(t) + \mu^{n+1} R_{n+1}(t, \mu),$$

где

$$R_n(t, \mu) = O(1), \ \forall t \in \left[0, \overset{\square}{\mu}\right].$$

Отсюда, следует, что решение задачи (1.1.1)-(1.1.2) представляется в виде асимптотического ряда:

$$y(x)=\frac{1}{\mu}\left[u_0\left(\frac{x}{\mu}\right)+\mu u_1\left(\frac{x}{\mu}\right)+...+\mu^n u_n\left(\frac{x}{\mu}\right)+\mu^{n+1}R_n\left(\frac{x}{\mu}\right)\right]. \qquad (3.1.14)$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. Пусть 1) $q(x),r(x)\in C^{(\infty)}[0,1]$; 2) $q_0=1$; 3) $a>0$ тогда решение задачи (1.1.1)-(1.1.2) представляется в виде (3.1.14).

Пример 3.1

$$\left(x+\varepsilon y(x)\right)y'(x)+y(x)=1,\ u(0)=a\neq 0, \qquad (3.1.15)$$

Имеет точное решение

$$y(x)=\frac{1}{\varepsilon}\left[-x\pm\sqrt{x^2+\varepsilon^2a^2+2\varepsilon x}\right].$$

Знак + (-) соответствует значению $a>0$ $(a<0)$.

Если сделать постановку $x=\mu t$, то

$$y(\mu t)=\frac{1}{\mu}\left[-t\pm\sqrt{t^2+\mu^2a^2+2\mu t}\right]. \qquad (3.1.16)$$

Решение задачи (3.1.15) имеет вид

$$y(x,\varepsilon)=\frac{1}{\mu}\left[-t+\sqrt{t^2+\mu^2}+\frac{\mu t}{\sqrt{t^2+\mu^2a^2}}-\frac{\mu^2 t}{2\sqrt{\left(t^2+\mu^2a^2\right)^3}}+O\left(\mu^3\right)\right]. \qquad (3.1.17)$$

Решение задачи (3.1.15) можно решить методом униформизации:

$$\begin{cases}\xi\dfrac{du}{d\xi}=-u(\xi)+1,\ \ u(1)=b,\\ \xi\dfrac{dx}{d\xi}=x(\xi)+\varepsilon u(\xi).\end{cases}$$

Решая уравнения для $u(\xi)$ получим

$$u(\xi)=\frac{\alpha}{\xi}+1,\ \alpha=a-1.$$

Подставляя это уравнение в $x(\xi)$ имеем

$$\xi x'(\xi)=x(\xi)+\varepsilon\alpha\xi^{-1}+\varepsilon,\ x(1)=1.$$

Отсюда

$$x(\xi)=\left(1+\frac{\varepsilon\alpha}{2}+\varepsilon\right)\xi-\frac{\varepsilon\alpha}{2}\xi^{-1}-\varepsilon.$$

Т.о., параметрическое решение задачи (3.1.15) имеет вид

$$x(\xi)=\frac{\alpha}{\xi}+1,$$

$$x(\xi)=\left(1+\frac{\varepsilon\alpha}{2}+\varepsilon\right)\xi-\frac{\varepsilon\alpha}{2}\xi^{-1}-\varepsilon. \qquad (3.1.18)$$

Если точке $x=0$ соответствует точка η то

$$\eta \square \sqrt{\frac{\varepsilon\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{\varepsilon(b-1)}{2}}.$$

Т.о.

$$u(0)\square \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{\varepsilon\alpha}{2}}}=\sqrt{\frac{2\alpha}{\varepsilon}}=a\Rightarrow b=1+\frac{a^2\varepsilon}{2}.$$

Исключая из уравнения (3.1.18) параметр ξ получим точное решение (3.1.16).

§ 3.2 Случай полюса произвольного целого порядка решения невозмущенного уравнения

Поэтому в уравнении (1.1.1) сделаем подстановку

$$x=\mu t,\ u(x)=\mu^{-m}z(t),\ \mu^{1+m}=\varepsilon, \tag{3.2.1}$$

Тогда (1.1.1) имеет вид

$$\left(t+z(t)\right)\frac{dz(t)}{dt}+q(\mu t)z(t)=\mu^m r(\mu t), \tag{3.2.2}$$

$$z(0)=\mu^m b,$$

За невозмущенную задачу для (1.1.1)-(1.1.2), берем следуюөую задачу

$$\left(t+y(t)\right)\frac{dy(t)}{dt}+my(t)=0,\ y(0)=\mu^m b\,. \tag{3.2.3}$$

Его решение имеет вид

$$\begin{gathered}t=c_0\,y^{-1/m}-\frac{1}{1+m}y:=\psi(c_0,y),\\ c_0=a\,\mu^{1+m},\ a=\frac{1}{1+m}b^{\frac{1+m}{m}}.\end{gathered} \tag{3.2.4}$$

Функция $\psi(c_0,y)$ является строго убывающей на отрезке $\left[0,\alpha(\mu)\right]=J(\mu)$, $\alpha(\mu)\square c_0^m\mu^m$. Обратную функцию для $\psi(c_0,y)$ обозначим $y(t)=\Phi(t,c_0)$.

Решение задачи (3.2.2) ищем в виде

$$z(t,\varepsilon)=z_0(t)+z_1(t)\mu+z_2(t)\mu^2+..., \tag{3.2.5}$$

где $z_0(t)=y(t)=y(t,\mu),\ z_k(t)=z_k(t,\mu)$, т.е. они зависят от малого параметра , но эту зависимость для краткости не пишем. Подставляя (3.2.5) в (3.2.2) для определения функций $z_k(t)$ получим следующие задачи

$$\left(t+z_0(t)\right)z_0'(t)=q(\mu t)z_0(t),\ z_0(0)=\mu^{1+q_0}a\,, \tag{3.2.6$_0$}$$

$$Lz_1(t):=\left(t+z_0(t)\right)z_1'(t)+\left(z_0'(t)+q(\mu t)z_1(t)\right)=z_1(t)z_0'(t)+\mu r(\mu t),\ u_1(0)=0, \tag{3.2.6$_1$}$$

$$Lz_2(t)=-z_1(t)z_1'(t)-z_0(t)z_2'(t),\ z_2(0)=0, \tag{3.2.6$_2$}$$

………………………………………………………….

$$Lz_n(t)=-\sum_{\substack{i+k=n\\ i,k\geq 1}}z_i(t)z_k'(t),\ z_n(0)=0, \tag{3.2.6$_n$}$$

……………………………………………………

Для решения задачи (3.2.6_0), его запишем в виде

$$\left(t+z_0(t)\right)z_0'(t)=-q_0z_0(t)+\tilde{q}(\mu t)z_0(t),\ z_0(0)=\mu^{1+m}a,$$

где $q(\mu t)=q_0-\tilde{q}(\mu t)$.

Для решения задачи (3.2.6_0) используем решение задачи (3.2.3) и ищем методом Лагранжа в виде $z_0(t)=\varphi(t,c)$, где c-зависит от переменной t. Тогда для определения функции $c(t)$ получим уравнение:

$$\frac{dc(t)}{dt}=\frac{\tilde{q}(\mu t)\cdot\varphi(t,c)}{\left(t+\varphi(t,c)\right)\varphi_c(t,c)},\ c(0)=c_0=a\mu^{1+m}. \qquad (3.2.7)$$

Но из уравнения

$$t=c\varphi^{-1/m}(t,c)-\frac{1}{1+m}\varphi(t,c),$$

имеем

$$(1+m)t\varphi^{1/m}(t,c)=(1+m)c-\varphi^{1+\frac{1}{m}}(t,c). \qquad (3.2.8)$$

Отсюда дифференцируя по c получим

$$\varphi_c(t,c)=m\frac{\varphi(t,c)}{\left(1+\varphi(t,c)\right)\varphi^{1/m}(t,c)}. \qquad (3.2.9)$$

Подставляя это выражение в (3.2.7) имеем

$$\frac{dc(t)}{dt}=\frac{1}{m}\tilde{q}(\mu t)\cdot\varphi^{1/m}\left(t,c(t)\right).$$

Используя (3.2.8) это уравнение запишем в виде

$$\frac{dc(t)}{dt}=\frac{1+m}{m}\cdot\frac{c(\mu t)}{(1+m)t+\varphi(t,c)},\ c(0)=a\mu^{1+m}.$$

Отсюда, переходим в интегральное уравнение

$$c(t)=a\mu^{1+m}\exp\left\{\frac{1+m}{m}\int_0^t\frac{\tilde{q}(\mu s)}{(1+m)s+\varphi\left(t,c(s)\right)}ds\right\}=T[c]. \qquad (3.2.10)$$

Рассмотрим множество положительных функций S

$$a\mu^{1+m}e^{-\frac{l}{m}}\le c(t)\le a\mu^{1+m}e^{\frac{l}{m}}. \qquad (3.2.11)$$

где постоянная l удовлетворяет неравенству

$$-l\mu t\le\tilde{q}(\mu t)\le l\mu t,\ \forall t\in[0,\tilde{\mu}].$$

Легко проверить, что оператор T переводит S в себя. Докажем, что оператор T является сжимающим в S. В самом деле, производная Фреше оператора T имеет вид

$$\frac{dT}{dc}=T\cdot\left\{\frac{1+m}{m}\int_0^t\frac{\tilde{q}(\mu s)}{\left[(1+m)s+\varphi\left(s,c(s)\right)\right]^2}\varphi_c\left(s,c(s)\right)ds\right\}.$$

Оценивая это выражение , с учетом (3.2.9) имеем

$$\left|\frac{dT}{dc}\right| \le a\mu^{2+m}e^{l/m}m\int_0^{1/\mu}\frac{s}{\left[(1+m)s+\varphi(s,c(s))\right]^2}\cdot\frac{\varphi(s,c(s))ds}{\left(s+\varphi(s,c(s))\right)\varphi^{1/m}(s,c(s))} \le$$

$$\overset{(29)}{\le} a\mu^{2+m}e^{l/m}m\int_0^{1/\mu}\frac{s}{(1+m)^2 s^2\varphi^{-2/m}(s,c(s))\left(s+\varphi(s,c(s))\right)}\cdot\frac{\varphi(s,c(s))ds}{\varphi^{1/m}(s,c(s))} =$$

$$= \frac{ae^{l/m}m}{(1+m)^2}\mu^{1+m}\int_0^{1/\mu}\frac{s\varphi^{1+1/m}(s,c(s))ds}{\left(s+\varphi(s,c(s))\right)c^2(s)} \le$$

$$\overset{(31)}{\le} \frac{ae^{2l/m}m}{(1+m)^2}\mu^{1+m}\int_0^{1/\mu}\frac{\left(a\mu^{1+m}\right)\left(a\mu^{1+m}\right)^{1/m}ds}{a^2\mu^{2(1+m)}} = \frac{a^{1/m}e^{2l/m}}{(1+m)^2}\mu^{1+1/m} = \alpha(\mu)$$

Отсюда, следует при малом μ: $\alpha(\mu)<1$, т.е. оператор $T[c]$ является сжимающим.

Таким образом доказана

Теорема 1. Задача (3.2.1) имеет единственное ограниченное решение $z_0(t)=z_0(t,\mu)$

$$a_1\mu^{1+m} \le z_0(t,\mu) \le a_2\mu^{2m+m^2} \ (0<a_1,a_2=const)$$

Лемма 2. Неоднородная задача

$$L\eta(t)=g(t),\ \eta(0)=0, \tag{3.2.12}$$

где $g(t)$-непрерывная ограниченная функция на отрезке $\left[0,\overset{\square}{\mu}\right]$ имеет единственное ограниченное решение, т.е.

$$|\eta(t)| \le l,\ \forall t\in\left[0,\overset{\square}{\mu}\right]. \tag{3.2.13}$$

Доказательство. Фундаментальное решение однородной задачи $L\eta(t)=0$ представляется в виде

$$\eta(t)=\exp\left\{-\int_0^t\frac{u_0'(s)+q(\mu s)}{s+u_0(s)}ds\right\}=\exp\left\{-\int_0^t\frac{u_0'(s)+1+q(\mu s)-1}{s+u_0(s)}ds\right\}=$$

$$=\frac{u_0(0)}{t+u_0(t)}\exp\left\{\int_0^t\frac{1-q(\mu s)}{s+u_0(s)}ds\right\}=$$

$$=\frac{u_0(0)}{t+u_0(t)}\exp\left\{\int_0^t\frac{m-q(\mu s)}{s+u_0(s)}ds-\int_0^t\frac{m-1}{s+u_0(s)}ds\right\},$$

т.е.

$$\eta(t)=\frac{u_0(0)}{t+u_0(t)}\cdot X(t)\exp\left\{-\int_0^t\frac{m-1}{s+u_0(s)}ds\right\}, \tag{3.2.14}$$

где

$$X(t)=\exp\left\{\int_0^t\frac{m-q(\mu s)}{s+u_0(s)}ds\right\}.$$

Очевидно, что $\left|X(t)\right|\le l,\ \left|X^{-1}(t)\right|\le\gamma$, где γ-некоторая постоянная которая не зависит от μ. Поэтому решение задачи (3.2.2) запишется в виде

$$\eta(t)=\frac{X(t)}{t+u_0(t)}\int_0^t X^{-1}(s)\cdot\exp\left\{-(m-1)\int_s^t\frac{d\tau}{\tau+u_0(\tau)}\right\}g(s)\,ds.$$

Отсюда, т.к.

$$\frac{1}{t+u_0(t)}>0,\ \left|g(t)\right|\le l,$$

Имеем,

$$\exp\left\{-(m-1)\int_s^t\frac{d\tau}{\tau+u_0(\tau)}\right\}\le 1.$$

Поэтому, получим

$$\eta(t)\le\frac{l\,t}{t+u_0(t)}\le l.$$

Лемма доказана. Из (3.2.12) также следует, что

$$\left|\eta'(t)\right|\le l\,.$$

Лемма 3. Задача ($3.2.11_n$) имеет единственное ограниченное решение для любого $\left[0,\overset{\square}{\mu}\right]$, т.е.

$$\left|u_n(t)\right|\le l,\ \ \forall n\in N\,.$$

Справедлива,

Теорема 2. Ряд (3.2.12) является асимптотическим рядом на отрезке $\left[0,\overset{\square}{\mu}\right]$, т.е.

$$u(t)=u_0(t)+\mu u_1(t)+\mu^2u_2(t)+\ldots\mu^n u_n(t)+\mu^{n+1}R_{n+1}(t,\mu),$$

где

$$R_n(t,\mu)=O(1),\ \ \forall t\in\left[0,\overset{\square}{\mu}\right].$$

Отсюда, следует, что решение задачи (1.1.1)-(1.1.2) представляется в виде асимптотического ряда:

$$y(x)=\frac{1}{\mu^m}\left[u_0\left(\frac{x}{\mu}\right)+\mu u_1\left(\frac{x}{\mu}\right)+\ldots+\mu^n u_n\left(\frac{x}{\mu}\right)+\mu^{n+1}R_n\left(\frac{x}{\mu}\right)\right] \qquad (3.2.15)$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. Пусть 1) $q(x),r(x)\in C^{(\infty)}[0,1]$; 2) $q_0=m$; 3) $a>0$ тогда решение задачи (1.1.1)-(1.1.2) представляется в виде (3.2.15).

Пример 3.2

$$\big(x+\varepsilon u(x)\big)u'(x)+mu(x)=\beta x,\ u(0)=a>0,\ \ \beta\in R. \qquad (3.2.16)$$

Решение этой задачи запишется в виде

$$y(x)=\frac{1}{\mu^m}\left[z_0(t)+\mu^n z_n(t)+O\left(\mu^{m+1}\right)\right],\ \ x=\mu t,\ \ \varepsilon=\mu^{m+1},$$

где $z_0(t)$ определяется неявно из соотношения

$$t = c_0\, z_0^{-1/m} - \frac{1}{1+m} z_0,\ c_0 = \alpha\, \mu^{1+m},\ \alpha = \frac{1}{1+m} a^{1+\frac{1}{m}}.$$

Причем $\left|z_m(t)\right| \le l.$

§ 3.3 Случай полюса произвольного рационального порядка большего одного решения невозмущенного уравнения

Поэтому в уравнении (1.1.1) сделаем подстановку

$$x = \mu t,\ u(x) = \mu^{-q} z(t),\ \mu^{p+q} = \varepsilon. \tag{3.3.1}$$

Тогда (1.1.1) имеет вид

$$\left(t + z(t)\right)\frac{dz(t)}{dt} + q(\mu t) z(t) = \mu^m r(\mu t), \tag{3.3.2}$$

$$z(0) = \mu^{p+q} a.$$

За невозмущенную задачу для (3.3.1)-(3.3.2), берем следующую задачу

$$\left(t + y(t)\right)\frac{dy(t)}{dt} + \frac{p}{q} y(t) = 0,\ y(0) = \mu^{p+q} b, \qquad . \tag{3.3.3}$$

Его решение имеет вид

$$\begin{gathered} t = c_0\, y^{-q/p} - \frac{p}{q+p} y := \psi(c_0, y), \\ c_0 = a\, \mu^{p+q},\ a = \frac{q}{p+q} b^{\frac{p+q}{p}}. \end{gathered} \tag{3.3.4}$$

Функция $\psi(c_0, y)$ является строго убывающей на отрезке $\left[0, \alpha(\mu)\right] = J(\mu)$, $\alpha(\mu) \sim c_0^{p+q}\, \mu^{p+q}$. Обратную функцию для $\psi(c_0, y)$ обозначим $y(t) = \Phi(t, c_0)$.

Решение задачи (3.3.2) ищем в виде

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t) + z_1(t)\mu + z_2(t)\mu^2 + \ldots, \tag{3.3.5}$$

где $z_0(t) = y(t) = y(t, \mu)$, $z_k(t) = z_k(t, \mu)$, т.е. они зависят от малого параметра, но эту зависимость для краткости не пишем. Подставляя (3.3.5) в (3.3.2) для определения функций $z_k(t)$ получим следующие задачи

$$\left(t + z_0(t)\right) z_0'(t) = q(\mu t) z_0(t),\ z_0(0) = \mu^{p+q} a, \tag{3.3.6$_0$}$$

$$Lz_1(t) := \left(t + z_0(t)\right) z_1'(t) + \left(z_0'(t) + q(\mu t) z_1(t)\right) = z_1(t) z_0'(t) + \mu r(\mu t),\ u_1(0) = 0 \tag{3.3.6$_1$}$$

$$Lz_2(t) = -z_1(t) z_1'(t) - z_0(t) z_2'(t),\ z_2(0) = 0 \tag{3.3.6$_2$}$$

……………………………………………………………

$$Lz_n(t) = -\sum_{\substack{i+k=n \\ i,k\ge 1}} z_i(t) z_k'(t),\ z_n(0) = 0 \tag{3.3.6$_n$}$$

……………………………………………………

Для решения задачи (3.3.6$_0$), его запишем в виде

$$\left(t + z_0(t)\right) z_0'(t) = -\frac{p}{q} z_0(t) + \tilde{q}(\mu t) z_0(t),\ z_0(0) = \mu^{p+q} a,$$

где $q(\mu t)=\frac{p}{q}-\tilde{q}(\mu t)$
.

Для решения задачи (3.3.6$_0$) используем решение задачи (3.3.3) и ищем методом Лагранжа в виде $z_0(t)=\varphi(t,c)$, где c-зависит от переменной t. Тогда для определения функции $c(t)$ получим уравнение:

$$\frac{dc(t)}{dt}=\frac{\tilde{q}(\mu t)\cdot\varphi(t,c)}{(t+\varphi(t,c))\varphi_c(t,c)},\ c(0)=c_0=a\mu^{p+q}. \tag{3.3.7}$$

Но из уравнения

$$t=c\varphi^{-q/p}(t,c)-\frac{q}{p+q}\varphi(t,c),$$

имеем

$$\frac{p+q}{q}t\varphi^{q/p}(t,c)=\frac{p+q}{q}c-\varphi^{\frac{p+q}{q}}(t,c). \tag{3.3.8}$$

Отсюда дифференцируя по c получим

$$\varphi_c(t,c)=\frac{p}{q}\frac{\varphi(t,c)}{(1+\varphi(t,c))\varphi^{q/p}(t,c)}. \tag{3.3.9}$$

Подставляя это выражение в (3.3.7) имеем

$$\frac{dc(t)}{dt}=\frac{q}{p}\tilde{q}(\mu t)\cdot\varphi^{q/p}(t,c(t)).$$

Используя (3.3.8) это уравнение запишем в виде

$$\frac{dc(t)}{dt}=\frac{p+q}{p}\cdot\frac{c(\mu t)}{\left(\frac{p+q}{q}\right)t+\varphi(t,c)},\ c(0)=a\,\mu^{p+q}.$$

Отсюда, переходим в интегральное уравнение

$$c(t)=a\,\mu^{1+\frac{p}{q}}\exp\left\{\frac{p+q}{p}\int_0^t\frac{\tilde{q}(\mu s)}{\left(1+\frac{p}{q}\right)s+\varphi(t,c(s))}ds\right\}=T[c]. \tag{3.3.10}$$

Рассмотрим множество положительных функций S

$$a\,\mu^{1+\frac{p}{q}}e^{-\frac{lq}{p}}\le c(t)\le a\,\mu^{1+\frac{p}{q}}e^{\frac{lq}{p}}. \tag{3.3.11}$$

где постоянная l удовлетворяет неравенству

$$-l\mu t\le\tilde{q}(\mu t)\le l\mu t,\ \forall t\in[0,\tilde{\mu}].$$

Легко проверить, что оператор T переводит S в себя. Докажем, что оператор T является сжимающим в S. В самом деле, производная Фреше оператора T имеет вид

$$\frac{dT}{dc}=T\cdot\left\{\frac{p+q}{p}\int_0^t\frac{\tilde{q}(\mu s)}{\left[\left(1+\frac{p}{q}\right)s+\varphi(s,c(s))\right]^2}\varphi_c(s,c(s))ds\right\}.$$

Оценивая это выражение , с учетом (3.3.9) имеем

$$\left|\frac{dT}{dc}\right| \le a\mu^{2+\frac{p}{q}} e^{lq/p}\,\frac{p}{q}\int_0^{1/\mu}\frac{s}{\left[\left(1+\frac{p}{q}\right)s+\varphi\left(s,c\left(s\right)\right)\right]^2}\cdot\frac{\varphi\left(s,c\left(s\right)\right)ds}{\left(s+\varphi\left(s,c\left(s\right)\right)\right)\varphi^{q/p}\left(s,c\left(s\right)\right)} \le$$

$$\overset{(29)}{\le} a\mu^{2+\frac{p}{q}} e^{lq/p}\,\frac{p}{q}\int_0^{1/\mu}\frac{s}{\left(1+\frac{p}{q}\right)^2 s^2\varphi^{-2/m}\left(s,c\left(s\right)\right)\left(s+\varphi\left(s,c\left(s\right)\right)\right)}\cdot\frac{\varphi\left(s,c\left(s\right)\right)ds}{\varphi^{1/m}\left(s,c\left(s\right)\right)} =$$

$$= \frac{ae^{lq/p}\,\frac{p}{q}}{\left(1+\frac{p}{q}\right)^2}\mu^{p+q}\int_0^{1/\mu}\frac{s\varphi^{1+q/p}\left(s,c\left(s\right)\right)ds}{\left(s+\varphi\left(s,c\left(s\right)\right)\right)c^2\left(s\right)} \le$$

$$\overset{(31)}{\le} \frac{ae^{2lq/p}\,\frac{p}{q}}{\left(1+\frac{p}{q}\right)^2}\mu^{p+q}\int_0^{1/\mu}\frac{\left(a\mu^{1+\frac{p}{q}}\right)\left(a\mu^{1+\frac{p}{q}}\right)^{q/p}ds}{a^2\mu^{2(p+q)}} = \frac{a^{q/p}e^{2lq/p}}{\left(1+\frac{p}{q}\right)^2}\mu^{1+q/p} = \alpha\left(\mu\right)$$

Отсюда, следует при малом μ: $\alpha\left(\mu\right)<1$, т.е. оператор $T\left[c\right]$ является сжимающим.

Таким образом доказана

Теорема 1. Задача (3.3.1) имеет единственное ограниченное решение $z_0\left(t\right)=z_0\left(t,\mu\right)$

$$a_1\mu^{p+q} \le z_0\left(t,\mu\right) \le a_2\mu^{(p+q)^2-1}\ \ (0<a_1,a_2=const).$$

Лемма 2. Неоднородная задача

$$L\eta\left(t\right)=g\left(t\right),\ \eta\left(0\right)=0 \qquad (3.3.12)$$

где $g\left(t\right)$-непрерывная ограниченная функция на отрезке $\left[0,\overset{\square}{\mu}\right]$ имеет единственное ограниченное решение, т.е.

$$\left|\eta\left(t\right)\right| \le l,\ \forall t\in\left[0,\overset{\square}{\mu}\right]. \qquad (3.3.13)$$

Доказательство. Фундаментальное решение однородной задачи $L\eta\left(t\right)=0$ представляется в виде

$$\eta\left(t\right)=\exp\left\{-\int_0^t\frac{u_0'\left(s\right)+q\left(\mu s\right)}{s+u_0\left(s\right)}ds\right\}=\exp\left\{-\int_0^t\frac{u_0'\left(s\right)+1+q\left(\mu s\right)-1}{s+u_0\left(s\right)}ds\right\}=$$

$$=\frac{u_0\left(0\right)}{t+u_0\left(t\right)}\exp\left\{\int_0^t\frac{1-q\left(\mu s\right)}{s+u_0\left(s\right)}ds\right\}=$$

$$=\frac{u_0\left(0\right)}{t+u_0\left(t\right)}\exp\left\{\int_0^t\frac{\frac{p}{q}-q\left(\mu s\right)}{s+u_0\left(s\right)}ds-\int_0^t\frac{\frac{p}{q}-1}{s+u_0\left(s\right)}ds\right\},$$

то есть

$$\eta(t)=\frac{u_0(0)}{t+u_0(t)}\cdot X(t)\exp\left\{-\int_0^t\frac{\frac{p}{q}-1}{s+u_0(s)}ds\right\}. \qquad (3.3.14)$$

где

$$X(t)=\exp\left\{\int_0^t\frac{\frac{p}{q}-q(\mu s)}{s+u_0(s)}ds\right\}.$$

Очевидно, что $|X(t)|\le l,\ |X^{-1}(t)|\le\gamma$, где γ-некоторая постоянная которая не зависит от μ . Поэтому решение задачи (3.3.12) запишется в виде

$$\eta(t)=\frac{X(t)}{t+u_0(t)}\int_0^t X^{-1}(s)\cdot\exp\left\{-\left(\frac{p}{q}-1\right)\int_s^t\frac{d\tau}{\tau+u_0(\tau)}\right\}g(s)ds,$$

Отсюда, т.к.

$$\frac{1}{t+u_0(t)}>0,\ |g(t)|\le l.$$

Имеем

$$\exp\left\{-\left(\frac{p}{q}-1\right)\int_s^t\frac{d\tau}{\tau+u_0(\tau)}\right\}\le 1.$$

Поэтому, получим

$$\eta(t)\le\frac{l\,t}{t+u_0(t)}\le l.$$

Лемма доказана. Из (3.3.12) также следует, что

$$|\eta'(t)|\le l\,.$$

Лемма 3. Задача (3.3.7$_n$) имеет единственное ограниченное решение для любого $\left[0,\mu\right]$, т.е.

$$|u_n(t)|\le l,\ \forall n\in N\,.$$

Справедлива,

Теорема 2. Ряд (3.3.12) является асимптотическим рядом на отрезке $\left[0,\mu\right]$, т.е.

$$u(t)=u_0(t)+\mu u_1(t)+\mu^2u_2(t)+...\mu^n u_n(t)+\mu^{n+1}R_{n+1}(t,\mu),$$

где

$$R_n(t,\mu)=O(1),\ \forall t\in\left[0,\mu\right].$$

Отсюда, следует, что решение задачи (3.3.1)-(3.3.2) представляется в виде асимптотического ряда:

$$y(x)=\frac{1}{\mu^{p+q}}\left[u_0\left(\frac{x}{\mu}\right)+\mu u_1\left(\frac{x}{\mu}\right)+...+\mu^n u_n\left(\frac{x}{\mu}\right)+\mu^{n+1}R_n\left(\frac{x}{\mu}\right)\right] \qquad (3.3.15)$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. Пусть 1) $q(x), r(x) \in C^{(\infty)}[0,1]$; 2) $q_0 = p/q$; 3) $a > 0$ тогда решение задачи (3.3.1)-(3.3.2) представляется в виде (3.3.15).

Пример 3.3

$$\left(x + \varepsilon u(x)\right)u'(x) + \frac{p}{q}u(x) = \beta x,\ u(0) = a > 0,\ \beta \in R,\ p > q,\ p,q \in N. \tag{3.2.16}$$

Решение этой задачи запишется в виде

$$y(x) = \frac{1}{\mu^{p+q}}\left[z_0(t) + \mu^{p+q} z_{p+q}(t) + O\left(\mu^{p+q+1}\right)\right],\ x = \mu t,\ \varepsilon = \mu^{p+q+1},$$

где $z_0(t)$ определяется неявно из соотношения

$$t = c_0 z_0^{-q/p+q} - \frac{q}{p+q} z_0,\ c_0 = \alpha \mu^{1+p+q},\ \alpha = \frac{q}{p+q} a^{1+\frac{q}{p}}$$

Причем $\left|z_{p+q}(t)\right| \le l.$

§3.4. Заключение к третьей главе

Разработан новый метод для получения равномерных асимптотических разложений решений модельного уравнения Лайтхилла в новой постановке задачи Коши, который является более общим чем, метод погранфункций. Этот метод дает обобщенный асимптотический ряд Пуанкаре для решения.

Этим новым методом построены равномерные асимптотические разложения решения сингулярно возмущенного уравнения Лайтхилла, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет:

-полюс первого порядка в регулярной особой точке;

- полюс любого натурального порядка в регулярной особой точке;

- полюс произвольного рационального порядка большего одного в регулярной особой точке.

Выводы

1. Впервые получены равномерные асимптотические приближения модельного уравнения Лайтхилла с помощью обобщенного метода погранфункций. Отметим, что ранее метод погранфункций применялись только для уравнений с малым параметром при старших производных, в случае асимптотической устойчивости решения быстрого времени, которые не содержат особые точки.

2. Создан новый метод, при помощи которого, получены обобщенные асимптотические разложения Пуанкаре, который обобщает метод структурного сращивания и метод погранфункций.

Список использованной литературы

1. Alymkulov, K.A. Method of structural Matching the Solution to the Lighthill Model Equation with a Regular Singular Point [Text] / K.A. Alymkulov, Zh.K. Zheentaeva // Doklady Mathematical Sciences, 2004. – V.70. – No. 2/2.
2. Barantsev, R.G. Asymptotic versus classical mathematics [Text] / R.G. Barantsev // Topics in Math. Analysis. –Singapore, 1989. – P.49-64.
3. Carrier, G.P. Boundary layer problems in applied mathematics [Text] / G.P. Carrier // Comm. Appl. Math. - 1954. –V.7. – P. 11-17.
4. Comstok, C. The Poincare-Lighthill perturbation technique and its generalizations. [Text]/ C. Comstok // SIAMReview. - 1972. - V.14, № 3. – P. 433-443.
5. Eckhaus, W. Asymptotic Analysis of Singular Perturbations. [Text] / W.Eckhaus // Amsterdam: North Holland, 1979.–287 p.
6. Habets, P. On the method of strained coordinates [Text] / P.Habets // Lect. Notes in Math.–1976. – Bd. 564, №1. – P.152-162.
7. Khalmatov, A.A. A boundary function method for solving the model Lighthill equation with a regular singular point [Text]/ K. Alymkulov, A.A. Khalmatov// ISSN 0001-4346, Mathematical Notes, 2012, Vol. 92, No. 6, pp. 117–121.
8. Khalmatov, A.A. About new statement and about new method of Cauchy problem for singular perturbed differential equation of the type of Lighthill [Text] / K. Alymkulov, K.B. Matanova, A.A. Khalmatov -International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR) Volume 3, Issue X, July 2015, PP.54 -64.
9. Kruskal, M.D. Asymptotology. [Text] / M.D.Kruskal // Proceeding of Conference on Mathematical Models on Physical Sciences. Englewood Cliffs, HJ: Prentice-Hall, 1963. –P.17-48.
10. Lighthill, M.J. A technique for rendering approximate solution to physical problems uniformly valid. [Text] /M.J. Lighthill// Phil. Magazine. –1949. – No. 40. – P.1179-1201.
11. O Malley, R.E. Jr. Wolfgang R. Wasov [Text] / R.E. Jr.O'Malley// SIAM News.1993.–V. 26.–P. 2-3.
12. O'Malley, R.E., Jr. Introduction to Singular Perturbation. [Text] / R.E. Jr.O'Malley// Academic Press, N.Y., 1974.
13. Segel, L.A. The importance of asymptotic analysis in Applied Mathematics [Text] / L.A.Segel // Amer. Math. Monthly, 1966. –V. 73.–P.7-14.

14. Sibuya, Y. On the differential equation [Text] / Y.Sibuya,K.J.Takahasi// Func. Eqs. –1955. – V. 9. – № 1-3. – P.71-81.
15. Wasov, W.A. On the convergence of an approximation method of M.J..Lighthill [Text] / W.A.Wasov // J. Rat. Mech. Anal. – 1955. – V. 40. – P. 751-767.
16. Абдуллаева, Ч.Х. Асимптотика решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения Лайтхилла второго порядка [Текст] / Ч.Х. Абдуллаева // Автореф на соск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук.–Ош, 2014. – 20 с.
17. Адрианов, И.В. Асимптотическаяматематикаисенергетика. [Текст] / И.В. Адрианов, Р.Г. Баранцев, Л.И. Маневич //М.: Либроком. – 2009 – 301 с.
18. Алымкулов К., Метод униформизации и обоснование метода Лайтхилла [Текст] / К. Алымкулов // Изв. АН Киргиз. ССР. – 1981.– № 1. – С. 35-38.
19. Алымкулов, К. К теории релаксационных колебаний решений уравнения Ван-дер-Поля [Текст] / К. Алымкулов // Изв. АН Киргиз. ССР. – 1985, № 2.– С. 14-17.
20. Алымкулов, К. Метод малого параметра и обоснование метода Лайтхилла [Текст] / К. Алымкулов // Изв. АН Киргиз. ССР. – 1979. № 6. – С. 8-11.
21. Алымкулов, К. Метод структурного сращивания решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой [Текст] / К.Алымкулов, Ж.К.Жээнтаева // Доклады Академии наук (Москва, Россия), 2004. – Т.398.– №6. – С.1-4.
22. Алымкулов, К. Равномерная асимптотика решения краевой задачи сингулярно возмущенного уравнения второго порядка со слабой особенностью [Текст] / К. Алымкулов, А.З. Зулпукаров // ДАН России, 2004. – Т. 398. –№ 5. – С.1-4.
23. Алымкулов, К. Развитие метода и обоснование метода Лайтхилла. [Текст] / К. Алымкулов // Изв. АН Кирг. ССР. –1985. –№1. – 13-17 с.
24. Алымкулов К., Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационныхзадач. [Текст] / К. Алымкулов // Бишкек: Илим, 1992. – 138 с.
25. Андрианов, И.В. Асимптология: идеи, методы, результаты.[Текст] /И.В.Андрианов, Л.И.Маневич //-М.: Аслан, 1994.-159 с.
26. Баранцев, Р.Г. Об асимптологии [Текст] /Р.Г.Баранцев // Вестник ЛГУ. – Сер.мат. мех. аспир.–1976. – № 1. – С. 69-77.
27. Вазов, В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. [Текст] / В.Вазов// Москва: Мир, 1968.–465 с.

28. Ван-Дайк, М. Методы возмущений в механике жидкости.[Текст] / М. Ван-Дайк // Москва: Мир, 1967. – 311 с.
29. Васильева, А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно–возмущенных уравнений. [Текст] / А.Б.Васильева, В.Ф. Бутузов // Москва: Высшая школа, 1990. -208 с.
30. Вишик, М.И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром [Текст] / М.И.Вишик, Л.А.Люстерник // УМН.–1960. –Т.15. – №3. – С. 3-80.
31. Гребенников, Е.С. Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. [Текст] / Е.С.Гребенников, Ю.А.Рябов //М.: Наука. – 1978. –128с.
32. Де Брейн, Асимптотические методы в анализе. [Текст] / Де Брейн // Москва: ИЛ.–1961.–248 с.
33. Жээнтаева Ж.К., Метод структурного сращивания решения модельного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой. [Текст] / Ж.К. Жээнтаева //Автореф. канд. дисс.– Бишкек, 2004.
34. Жээнтаева, Ж.К., Метод сращивания для возмущенного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой [Текст] / Ж.К.Жээнтаева // Научные труды ОшГУ, Физико-матем. науки. – Ош, 1999. – Вып.2. – С.46-53.
35. Зулпукаров, А.З. Метод структурного сращивания для решения краевых задач сингулярно возмущенных уравнений второго порядка с особыми точками. [Текст]/ А.З. Зулпукаров // Автореф. канд. дисс. –Ош, 2009.– 20 с.
36. Ильин, А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. [Текст]/ А.М. Ильин // Москва: Наука, 1989.-334 с.
37. Иманалиев, М.И. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем. [Текст]/ М.И. Иманалиев // Фрунзе: Илим, 1972. – 356 с.
38. Иманалиев, М.И. Явление всплеска для скалярных сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений первого порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, П.С.Панков // Изв. АН Киргиз. ССР.- 1987. № 3.- С. 3-8.
39. Какишов, К. Асимптотическая теория сингулярно-возмущенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, когда вырожденное уравнение имеет разрывные решения (дисс. докт. физ. –матем. наук). [Текст] / К. Какишов // Бишкек, 1993. – 228 с.
40. Касымов, К. Асимптотическое разложение решения задачи с начальным скачком для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных

уравнений с малым параметром при старшей производной [Текст]/ К. Касымов // Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т.10. –№7. – С. 1248-126.
41. Коул, Дж. Методы возмущений в механике жидкости. [Текст]/ Дж. Коул // Москва: Мир, 1972. – 276 с.
42. Маневич, Л.И. От теории возмущений к асимптотологии [Текст]/ Л.И. Маневич // Соросовский образовательный журнал. – 1996.–т.2. –№ 9. – с. 113-121.
43. Маслов В.П., Теория возмущений и асимптотические методы. [Текст]/ В.П. Маслов // Москва: МГУ, 1965.– 120 с.
44. Мищенко, Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. [Текст]/ Е.Ф.Мищенко, Н.Х.Розов // Москва: Наука, 1975.– 248 с.
45. Моисеев, Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. [Текст]/ Н.Н. Моиисеев // М.: Наука, 1969. – 380 с.
46. Найфе, А.Х.Методы возмущений. [Текст]/А.Х. Найфе// Москва: Мир, 1976. – 426 с.
47. Треногин, В.А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника-Вишика [Текст]/ В.А. Треногин // Успехи математических наук. –т. XXV. – Вып. 4 (154), 1970.– С.123-156.
48. Туркманов, Ж.К. Асимптотика решений возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений со слабой особой точкой (Дисс. … канд. физ.-матем. наук). [Текст]/ Ж.К. Туркманов // Бишкек, 1998. – 110 с.
49. Туркманов, Ж.К. Об одном классе возмущенных дифференциальных уравнений со слабой особенностью [Текст]/ Ж.К. Туркманов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 1997. – Вып. 26. – С.143-147.
50. Федорюк, М.В. Асимптотика: интегралы и ряды. [Текст]/М.В. Федорюк // М.: Наука, 1987. –544 с.
51. Федорюк, М.В. Асимптотические методы в анализе [Текст]/М.В. Федорюк // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. –Т.13. –М.: ВИНИТИ, 1986. –С. 93-210.
52. Фридрихс, К.О. Асимптотические явления в математической физике [Текст]/ К.О. Фридрихс // Математика (сб. переводов иностр. статей), 1952. – №2. –С. 79-84.
53. Халматов, А.А. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс второго порядка в регулярной особой точке [Текст] /А.А. Халматов//

Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям.-Бишкек, 2010.-Вып. 43.-С. 89-94.
54. Халматов, А.А. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс порядка три вторых в регулярной особой точке/К. Алымкулов, А.А. Халматов// Вестник КНУ.-Бишкек, 2011.-С.39-42
55. Халматов, А.А. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс третьего порядка в регулярной особой точке [Текст] /А.А. Халматов // Вестник КНУ.-Бишкек, 2011.-С. 303-307
56. Халматов, А.А. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой [Текст] / К. Алымкулов, А.А. Халматов // Математические заметки. Россия. –Москва, 2012.–С.95-96.
57. Халматов, А.А. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс целого порядка в регулярной особой точке. [Текст] /А.А. Халматов//Вестник ОшГУ.–Ош, 2012.–Вып 3.–С.157-162.
58. Халматов, А.А. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс дробного порядка в регулярной особой точке. [Текст]/А.А. Халматов // Вестник ОшГУ.–Ош, 2013.–Вып 1.–С.285-290.
59. Халматов, А.А. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс порядка четыре третьих в регулярной особой точке. [Текст] /А.А. Халматов //Вестник КУУ.–Наука. Образование. Техника. –Ош, 2013.–Вып.4–С. 34-38.
60. Халматов, А.А. Метод продолжения для модельного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой[Текст] /К. Алымкулов, А.А. Халматов //Труды международной научной конференции посвященной 20-летию образования Кыргызско-Узбекского университета.–Ош, 2014.–Вып.4–С. 119-121.
61. Халматов, А.А. Метод продолжения параметров для модельного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой [Текст] /К. Алымкулов, Б. Азимов, А.А. Халматов // Вестник ОшГУ.–Ош, 2014.–Вып 3.–С.17-22.
62. Харди Г. Расходящиеся ряды. [Текст] / Г. Харди //М.: ИЛ, 1951. –504с.

63. Цянь-Сюэ-сень. Метод Пуанкаре-Лайтхилла-Го [Текст] /Цянь-Сюэ-сень.// Проблемы механики. - Москва: Изд. иност. лит.– Вып. 2. – С.7-26.
64. Чанг К. Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. [Текст] /К . Чанг, Ф. Хаусс // Москва: Мир, 1988.– 204 с.