КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени И.РАЗЗАКОВА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КОМИТЕТА НАУКИ МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

На правах рукописи
УДК 539.3

САРСЕНОВ БАКЫТБЕК ТЕМИРБЕКОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ МАССИВА В ОКРЕСТНОСТИ ОЧАГА ЗЕМЛЕТРЕСЕНИЯ

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Дуйшеналиев Т.Б.

Бишкек, Алматы – 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Изучение воздействия сейсмических волн при землетрясениях на состояние земной коры, ее поверхности и наземные сооружения методами математического моделирования относится к числу наиболее сложных нестационарных контактных краевых задач механики деформируемого твердого тела и пока еще практически не разработано даже на моделях изотропных упругих сред. Методы математического моделирования являются наиболее экономичными и эффективными для изучения волновых процессов в средах и конструкциях. Их использование связано с построением математических моделей и созданием на их базе программных комплексов, которые дают возможность проводить разнообразные компьютерные эксперименты по изучению напряженно-деформированного состояния сред и конструкций при разнообразных динамических воздействиях, которые на реальных объектах провести экспериментально часто просто невозможно.

Силовые динамические нагрузки невозможно определить без изучения полной, пространственно-временной картины напряженного состояния объекта, возникающего при распространении волн в твердых телах. Поэтому, исследование неустановившихся процессов с использованием механики деформируемого твердого тела, теории упругости, в частности, приобретает в настоящее время все большее значение.

Аналитические методы, основанные на разделении переменных и интегральных преобразований типа преобразований Фурье или Лапласа и др. позволили найти решение достаточно широкого круга задач стационарных и нестационарных колебаний упругих сред и сред с включениями, как правило, для областей с канонической формой границ (прямая, круг, эллипс, плоскость, сфера, эллипсоид) формы с известными ограничениями на вид граничных условий (см., например, [1-4]). Анализ работ, в которых получены аналитические решения задач динамической теории упругости, показывает, что они весьма сложны в расчетах, особенно при использовании интегральных преобразований по времени, т.к. аналитическое построение оригиналов решений из-за сложности вида их трансформант невозможно, а процедура численного восстановления оригиналов решений при обратном преобразовании часто неустойчива, особенно для быстроменяющихся во времени знакопеременных нагрузок, что характерно для практических задач. Это существенно сужает возможность их использования в практических расчетах. Вместе с тем, аналитические решения имеют большое значение при исследовании вопроса о точности результатов, полученных на основе приближенных и численных методов.

В настоящее время необходима связь теории и практики, т.е. разработка математических моделей динамических процессов в упругих телах и средах теории упругости, которые были бы непосредственно применимы для вычислительной реализации и в достаточной мере точно отражали физическую сущность процессов.

Для решения статических и динамических задач упругости и термоупругости в областях с произвольной геометрией границ в последние три – четыре десятилетия интенсивно развивается *метод граничных интегральных уравнений* в работах Перлина П.И [5], Купрадзе В.Д. [6], Угодчикова А.Г., Хуторянского Н.М [7-8], Sah J., Tasaka N. Crouch S.L. и др. [9-11]. Интенсивные исследования в этом направлении проводились и казахстанской школой механиков в работах Айталиева Ш.М., Алексеевой Л.А., Дильдабаева Ш.А., Закирьяновой Г.К. и др. [12-20].

Численная реализация этого метода, получившая название *метода граничного элемента*, широко применяется в настоящее время для решения широкого класса стационарных и квазистатических задач механики сплошных сред [21-23] наряду с *методом конечных элементов*. Последний интенсивно развивается в Казахстане для решения модельных задач механики горных пород в работах Ержанова Ж.С., Айталиева Ш.М., Масанова Ж.К., Баймаханова И.Б. и др. [24-27].

Для решения нестационарных динамических задач в упругих средах к настоящему времени разработаны также разнообразные численные методы: конечно-разностный *метод пространственных характеристик* в работах Клифтона Р.Д. [28], Рекера В.В. [29] и др., *метод распада разрыва* в работах Годунова С.К [30] , *метод дробных шагов* Яненко Н.Н. [31], *метод бихарактеристик* в работах Тарабрина Г.Т., Байтелиева Т.Б., Мардонова Б.М., Аширбаева Н.К., Джузбаева С.С. [32-37] и др. численные методы в работах Кукуджанова В.Н. [38], Бейда Ю., Кондаурова В.К., Сабодаш П.Ф., Чебан В.Г., Григоряна С.С., Чередниченко Р.А. и др.[39 - 46]

Проблемам контактного взаимодействия упругих сред и исследованиям волновых процессов в составных упругих средах посвящено значительно меньшее число работ. Среди выше названных имен следует отметить работы Ержанова Ж.С, Каримбаева Т.Д., Айталиева Ш.М., Алексеевой Л.А., Байтелиева Т.Б. [4, 12, 24, 35, 37] и др..

Как показано в этих работах, поведение неоднородной составной упругой среды при динамических воздействиях существенно отличается от её состояния при статическом нагружении и существенно зависит от контактных условий на границе раздела сред. В связи с этим одной из актуальных задач динамики упругой неоднородной среды является исследование неустановившихся процессов при взаимодействии твердых контактирующих тел. При нестационарных внешних воздействиях в деформируемом твердом теле возникают волны напряжений, которые, распространяясь, отражаются от граничных поверхностей и преломляются на границе раздела сред. В результате многократной суперпозиции отраженных и преломленных волн образуется сложное дифракционное поле. В этой связи определение динамических напряжений и деформаций в среде приобретает исключительно важное значение. Наиболее пригодны для изучения таких процессов все-таки численные методы.

Проводя обзор сделанных работ в области численных методов волновой динамики можно показать, что на данном этапе они далеки от полного завершения. Сравнительно полно они разработаны лишь для расчетных областей, типа прямоугольников, цилиндров и для однородных пространств, причем при достаточно гладких граничных и начальных условиях.

Благодаря относительной простоте получения разрешающих разностных уравнений, одним из наиболее удобных в приложениях методов является *метод бихарактеристик* с использованием идеи метода расщепления, наиболее развитый в работах Тарабрина [32-33]. Этот метод, иногда называемый *методом Тарабрина*, по сравнению с методом Клифтона, дает возможность получить разрешающие уравнения, не требуя операции симметрирования с использованием интерполяции или аппроксимации производных и самих функций. В граничных и угловых точках конечно-разностные определяющие уравнения получаются естественным путем без привлечения дополнительных соотношений, как это сделано в [28-29].

Существенное упрощение в этом методе возникает в результате исключения из конечно-разностной аппроксимации производных в не бихарактеристических направлениях. Этот метод в настоящей работе используется для решения задач нестационарной дифракции волн в упругом полупространстве с поверхностным включением.

Актуальность темы диссертации. Разрабатываемая в работе модель сейсмического воздействия на наземное сооружение является новой, для реализации которой используются модели и методы теории упругости и вычислительной математики. Для моделирования состояния земной коры при землетрясениях здесь исследуется динамика упругого полупространства с трещиной при сбросе вертикальных либо горизонтальных напряжений на ней, что характерно при образовании в земной коре трещин разрыва либо сдвига при землетрясениях.

Динамика упругого полупространства при действии внутренних источников мало изучена. Решение задач стационарной дифракции цилиндрических и сферических волн на границе полупространства, порождаемых внутренними сосредоточенными источниками, получено Алексеевой Л.А. и Дильдабаевым Ш.А. и рассмотрено в [4,12]. При этом авторами использовался метод переразложения цилиндрических и сферических волн на плоские и интегральные Фурье-разложения. Аналитического решения подобной задачи в нестационарной постановке пока нет. Поэтому актуальной является разработка численных методов решения задач нестационарной дифракции волн в упругой полуплоскости при действии внутренних источников возмущений.

В задачах статики большое внимание уделяется исследованию концентраций напряжений в однородных телах. При нестационарном воздействии чаще исследуется поле скоростей и перемещений, несмотря на то, что вопросы концентрации напряжений являются столь же важными, как и в статических задачах [1]. Эта проблема также исследуется в работе.

Одним из наиболее сложных вопросов учета воздействия строительных сооружений является исследование взаимодействия сооружения с грунтом. Теоретическое исследование этой задачи опирается на математическое моделирование реальных физико-механических свойств системы «сооружение-грунт». В математическом плане моделирование такого взаимодействия приводит к задачам нестационарной дифракции и преломления волн на границе контакта наземного сооружения и породного массива. Этот класс задач пока еще совсем не изучен методами механики и математической физики.

Здесь наземное сооружение моделируется прямоугольным упругим телом на дневной поверхности упругого массива при жестком контакте на границе раздела сред. В условиях плоской деформации решена задача определения его напряженно-деформированного состояния при преломлении упругих волн, порождаемых сбросом напряжений на трещинах отрыва либо сдвига.

Связь темы диссертации с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями. Работа выполнялась в Кыргызском государственном техническом университете имени И.Раззакова и в Республиканском государственном предприятии на праве хозяйственного ведения «Институт математики и математического моделирования» Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан. Исследования выполнены в рамках научно–исследовательских работ по темам:

– «Обобщенные решения краевых задач волновой динамики деформируемых твердых и электромагнитных сред» (2009–2011гг, направление 1.5 «Качественный анализ дифференциальных уравнений и методы решения задач математической физики» по Программе Фундаментальных исследований Ф.0508 «Актуальные проблемы физики, математики, механики и информатики»)

– «Дифракция волн в упругих, термоупругих и многокомпонентных средах» по бюджетной подпрограмме РК 101 «Грантовое финансирование научных исследований», приоритет «Интеллектуальный потенциал страны, подприори-тет «Фундаментальные исследования в области естественных наук», грант 1022/ГФ2 (2012-2014);

Цель и задачи исследования. Разработка математической модели процессов распространения и дифракции упругих волн в упругой полуплоскости с упругим поверхностным включением для математического моделирования процессов воздействия сейсмических волн на наземные сооружения.

Для достижения этой цели поставлены следующие задачи исследования:

– построить математическую модель динамического поведения упругой полуплоскости со свободной поверхностью при сбросе напряжений на трещине;

– на основе метода бихарактеристик Тарабрина разработать пакет прикладных программ для численных расчётов поля скоростей и напряжений в упругой полуплоскости при сбросе напряжений на прямолинейной трещине;

– провести численные эксперименты и анализ напряжённо-деформированного состояния полуплоскости при сбросе вертикальных и горизонтальных напряжений на трещине;

– построить математическую модель динамического поведения упругой полуплоскости с упругим поверхностным включением прямоугольной формы при дифракции и преломлении упругих волн на контактной поверхности;

– на основе метода бихарактеристик Тарабрина разработать пакет прикладных программ для численных расчётов напряжённо-деформированного состояния рассматриваемого включения при дифракции и преломлении на контактной поверхности нестационарных упругих волн в упругой полуплоскости;

– провести с последующим анализом многовариантные расчёты напряжённо-деформированного состояния рассматриваемого тела в зависимости от физико-механических и геометрических параметров, контактных условий и типа нагрузки.

Научная новизна полученных результатов. Дано дальнейшее развитие математической модели и пакетов прикладных программ для исследования нестационарного напряженно-деформированного состояния земной поверхности и наземных сооружении, обусловленных сбросом тектонических напряжений на глубинных трещинах в земной коре.

Достоверность результатов работы подтверждается:

– корректностью математической постановки задачи;
– строгостью используемого математического аппарата;
– выполнением необходимых условий устойчивости и численной проверкой устойчивости метода расчета;
– соответствием полученных результатов физическому содержанию поставленной задачи.

Практическая значимость полученных результатов. Разработанные математическая модели и пакеты компьютерных программ для решения задачи нестационарной дифракции волн в упругом полупространстве с прямоугольным упругим включением на его поверхности при нестационарной дифракции волн позволяют исследовать динамику массива и наземных сооружений в окрестности очага землетрясения с учетом их физико-механических свойств (плотность сред, упругие параметры), геометрических параметров (размеры сооружения, глубина трещины, расстояние от эпицентра), а также моделировать разнообразный тип сейсмического воздействия при разном типе трещин в земной коре.

Результаты проведенных исследований полезны для разных областей знания, особенно для физики Земли и сейсмологии для понимания сейсмических явлений в земной коре и наземных сооружений. Разработанные пакеты компьютерных программ можно рекомендовать для применения при решении обширного круга задач теории упругости, геофизики и сейсмологии.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

– для исследования состояния земной поверхности, обусловленного сбросом тектонических напряжений на глубинных трещинах в земной коре при землетрясениях разработана математическая модель динамики упругого полупространства при сбросе напряжений на горизонтальной трещине в условиях плоской деформации.
– на основе явной разностной схемы численного метода бихарактеристик разработан алгоритм и пакет компьютерных программ на алгоритмическом

языке программирования DELPHI для определения состояния массива и дневной поверхности при сбросе напряжений на горизонтальной трещине.

– проведены многовариантные численные эксперименты и анализ напряженно-деформированного состояния земной поверхности при дифракции сейсмических волн. Построены дифракционные картины процессов распространения и отражения сейсмических волн, характеризующие поля скоростей и напряжений в земной коре, осциллограммы скоростей и напряжений на дневной поверхности, и проведено исследование волновых процессов при разном типе сейсмического воздействия, моделирующего процессы образования в земной коре трещин отрыва и сдвиговых трещин.

– разработана математическая модель дифракции и преломления сейсмических волн в прямоугольном упругом поверхностном включении на упругом полупространстве при жестком контактном взаимодействии.

– на основе явной разностной схемы разработан алгоритм и пакет компьютерных программ на языке DELPHI для исследования напряженно-деформированного состояния наземного сооружения при дифракции сейсмических волн, обусловленный сбросом тектонических напряжений на глубинных трещинах в земной коре.

– проведены многовариантные численные эксперименты и анализ напряженно-деформированного состояния поверхностного включения при дифракции упругих волн, обусловленных сбросом напряжений на горизонтальной трещине в упругом полупространстве. Построены дифракционные картины процессов преломления и отражения упругих волн в прямоугольном поверхностном включении, характеризующие поля скоростей и напряжений в наземных сооружениях, осциллограммы скоростей и напряжений.

Личный вклад соискателя состоит в непосредственном выполнении исследований по всем главам и звеньям диссертации: выводе всех аналитических соотношений динамики упругого полупространства с поверхностным включением при сбросе напряжения на глубинной трещине; разработке алгоритмов решения задач, составлении компьютерных программ и проведении на их основе многовариантных численных экспериментов; обработке и анализе результатов расчётов; формулировке научных выводов.

Апробация работы. Основные результаты по теме диссертации докладывались на научных семинарах и международных научных конференциях: Международный Джодасбековский симпозиум (Алматы, 2011); Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики, механики», посвященная памяти акад. Н.Н. Яненко

(Новосибирск, 2011); Международная научная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященная памяти акад. М.Я. Леонова (Бишкек, 2012); Международная научно–практическая конференция «Проблемы геомеханики и преподавания естественных дисциплин» (Алматы, 2012), Международная научная конференция «Рахматуллинские – Ормонбековские чтения» (Бишкек, 2013), Международная научная конференция «Наука, образование, инновации: приоритетные направления развития», посвященная 60–летию КГТУ им. И.Раззакова (Бишкек, 2014).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. По теме диссертационной работы опубликовано 18 научных работ, в том числе 7 статей в научных журналах, 7 статей в сборниках и 4 тезиса конференций.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, вывода, списка использованной литературы и приложения, содержит 122 рисунка и список литературы из 71 наименований, всего, 110 страниц машинописного текста без приложения.

В первой главе с использованием теории упругости разработана математическая модель динамики породного массива и дневной поверхности, обусловленного сбросом тектонических напряжений на глубинных трещинах в земной коре при землетрясениях. Приведены некоторые основные понятия и уравнения линейной теории упругости. Дана постановка соответствующей начально-краевой задачи динамики упругой полуплоскости при сбросе напряжений на трещине. На основе метод бихарактеристик разработан алгоритм ее решения, который реализован в виде пакета компьютерных программ на языке DELPHI. Проведены многовариантные численные эксперименты для изучения напряженно-деформированного состояния среды при сбросе вертикальных и горизонтальных напряжений, моделирующих процессы распространения сейсмических волн при образовании трещин отрыва и сдвига в земной коре. Построены и проанализированы дифракционные картины полей скоростей, осциллограммы скоростей и напряжений в характерных точках среды и дневной поверхности, изолинии инвариантов тензора напряжений для различных времен.

Во второй главе на основе этого же численного метода решена задача динамики упругого тела, расположенного на упругом полупространстве, при дифракции упругих волн. Задача является модельной для исследования динамики наземных сооружений при сейсмических воздействиях. Дана постановка соответствующей начально-краевой контактной задачи динамики упругой полуплоскости с прямоугольным упругим телом на ее границе при жестком контактном взаимодействии. Принята явная разностная схема решения уравнений движения для составных упругих сред, построенная на основе метода бихарактеристик с привлечением идеи расщепления по пространственным координатам. Получены разрешающие разностные уравнения для внутренних, граничных и угловых точек тела. Разработан алгоритм решения задачи, который также реализован в виде пакета компьютерных программ на языке DELPHI. На основе проведенных компьютерных экспериментов изучено напряженно-деформированное состояние, дифракция и преломление волн в упругом теле при сбросе вертикальных и горизонтальных напряжений на горизонтальной трещине в упругом полупространстве.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [50- 71].

Автор выражает глубокую признательность и благодарность за постановку задач и научные консультации доктору физико-математических наук, профессору Алексеевой Л.А. и доктору физико-математических наук, профессору Дуйшеналиеву Т.Б.

ГЛАВА 1

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ УПРУГОГО МАССИВА ПРИ ОБРАЗОВАНИИ ТРЕЩИН

Для моделирования состояния породного массива и земной поверхности при землетрясениях здесь исследует процесс распространения и дифракции волн на границе упругого полупространства, порождаемых сбросом напряжений на трещине.

Математическое моделирование процессов распространения и дифракции волн в различных телах и средах относится к актуальным проблемам математической физики. Наиболее изучены процессы распространения гармонических волн и стационарная дифракция волн в средах с каноническими граничными поверхностями. Нестационарные волновые процессы в деформируемых твердых средах гораздо менее изучены. Для решения нестационарных задач в упругих средах широко используются разнообразные численные и численно – аналитические методы: пространственных характеристик, конечных элементов, граничных интегральных уравнений и другие. Разностный метод с применением метода пространственных характеристик ранее был предложен Р.Д.Клифтоном в [28] для исследования плоских динамических задач, а в [29] развит В.В.Рекером для изучения распространения упругих волн в изотропных телах прямоугольной формы. Одним из наиболее удобных в приложениях методов является метод бихарактеристик с использованием идей метода расщепления, развитый Г.Т.Тарабриным [32]. В настоящей главе на основе этого метода построено решение задачи нестационарной динамики однородного упругого изотропного полупространства с трещиной в условиях плоской деформации.

Проведено исследование волновых процессов при разном типе сейсмического воздействия, моделирующего процессы образования в земной коре трещин отрыва и сдвига.

1.1. Постановка задачи дифракция волн в упругом полупространстве при сбросе напряжений на трещине

Пусть упругая изотропная среда D (рис.1.1.) с коэффициентами Ламе λ, μ и плотностью ρ занимает полупространство $x_1 \geq 0$. Рассмотрим динамику среды в условиях плоской деформации при сбросе напряжений на горизонтальной трещине S, которая расположена на глубине L ($x_1=L$, $|x_2|\le d$).

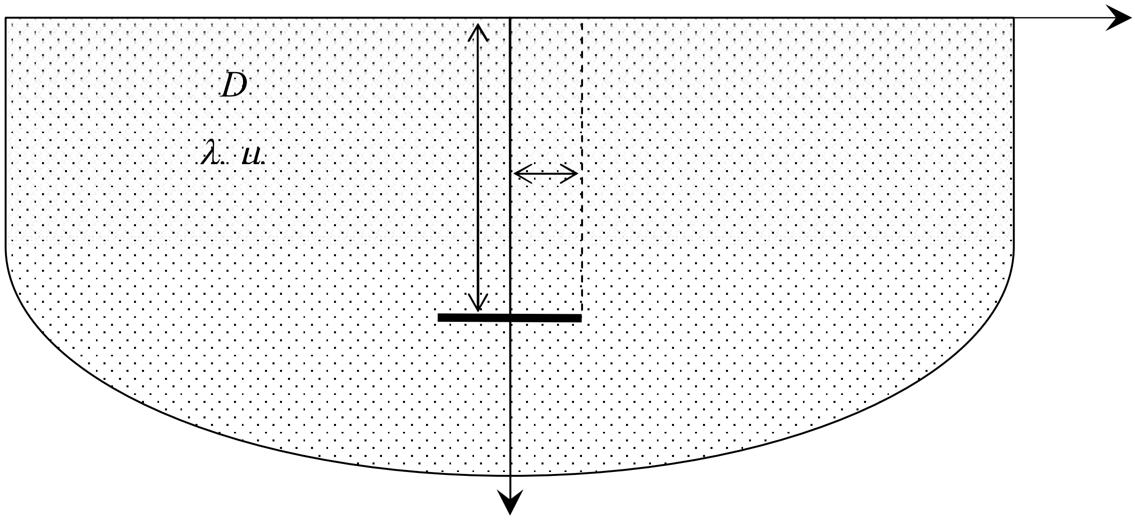


Рис. 1.1. Полуплоскость с горизонтальной трещиной (расчетная схема).

Предполагается, что в начальный момент среда покоится:

$$\mathbf{u}=0,\ \dot{\mathbf{u}}=0 \ \text{ при } \ x_1\ge 0,$$

а граница полупространства (*дневная поверхность*) свободна от внешних нагрузок:

$$\sigma_{11}=\sigma_{12}=0 \ \text{ при } \ x_1=0.$$

Здесь и далее $\mathbf{u}=(u_1,\ u_2)$ – перемещения среды, σ_{ij} – тензор напряжений, x_i – координаты точек среды $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$, t – время. Индексами после запятой обозначаются частные производные по декартовым координатам, а точкой сверху – частные производные по времени. Для удобства изложения будем применять латинские и греческие индексы, которые принимают значения 1, 2. По повторяющимся греческим индексам в произведении выполняется суммирование (тензорная свертка), а по повторяющимся латинским индексам суммирования нет.

Так как на бесконечности отсутствуют источники колебания, то очевидным является требование, чтобы на бесконечности выполнялись условия затухания:

$$u_j\to 0,\ \sigma_{ij}\to 0 \ \text{ при } \ \|x\|\to\infty.$$

Перемещения среды удовлетворяют уравнениям движения [2]:

$$\sigma_{i\beta},_{\beta} + F_i \quad \rho\, \dot{v}_i, = \; i \quad 1{,}2\,, \tag{1.1}$$

где v_i- компоненты вектора скорости $\boldsymbol{v}$; F_i - проекции объемной силы на соответствующие координатные оси.

Связь между компонентами тензора напряжения и компонентами вектора перемещения выражается законом Гука [2]:

$$\sigma_{ij} = \lambda\, u_{\beta},_{\beta}\, \delta_{ij} + \mu(u_i,_j + u_j,_i), \quad i, j = 1{,}2\,, \tag{1.2}$$

где δ_{ij} - символ Кронекера.

Сброс напряжения на трещине выражается через компоненты F_i объемной силы $\boldsymbol{F}$ и определяются сингулярной обобщенной функцией – простым слоем на трещине S [47] , здесь они имеют следующий вид:

$$F_i = n_{\beta}\left[\sigma_{i\beta}\right]_S = \delta_S(x) \quad n_{\beta}\left[\sigma_{i\beta}\right]_S \delta(x_1 - L)H(d - |x_2|), \quad i = 1{,}2 \tag{1.3}$$

где выражение в квадратных скобках – скачок компонент тензора напряжений на берегах трещины, $\boldsymbol{n}$ – единичная нормаль к ее поверхности, в данном случае $\mathbf{n} = (n_1, n_2) = (1; 0)$, $H(x_1)$ – функция Хевисайда, $\delta(x_1)$ – $\delta-$функция Дирака. Предполагается, что скачок напряжений на трещине известен:

$$n_{\beta}\left[\sigma_{i\beta}(x)\right]_S = P_i(x,t), \quad x \in S, t > 0. \tag{1.4}$$

Здесь в расчетах принимается

$$P_i(x,t) = Pt\,\mathrm{e}^{-at} H(t) \tag{1.5}$$

где $a \geq 0$. Требуется определить напряженно-деформированное состояние среды и дневной поверхности при сбросе напряжений на трещине.

Здесь в расчетах для представления $\delta-$функция Дирака используются дельтообразные последовательности $\delta_{\varepsilon}(x)$ [48]:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_{\varepsilon}(x) = \delta(x), \quad \delta_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} (2\varepsilon)^{-1}, & x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ 0, & x \notin [-\varepsilon, \varepsilon] \end{cases},$$

где $\varepsilon > 0$. Т.е. в расчетах

$$F_i = F_i^{\varepsilon} \quad n_\beta \left[\sigma_{i\beta}\right]_S \delta_\varepsilon (x_1 - L) H(d - |x_2|), \quad i = 1,\ 2$$

1.2. Уравнения движения. Бихарактеристики и условия на них

Уравнения, описывающие малые динамические деформации в условиях плоской задачи, можно представить в виде гиперболической системы линейных дифференциальных уравнении в частных производных первого порядка относительно компонент вектора скорости и тензора напряжении.

Для удобства вводится независимые безразмерные переменные и искомые величины. Следуя [37], можно записать

$$\bar{t} = \frac{tc_1}{L}; \quad \bar{x}_i = \frac{x_i}{L}; \quad \bar{v}_i = \frac{1}{c_1}\frac{\partial u_i}{\partial t}; \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\rho c_1^2}; \quad \bar{F}_i = \frac{F_i L}{\rho c_1^2};$$

$$\bar{\gamma}_{12} = \bar{\gamma}_{21} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2; \quad \bar{\gamma}_{11} = \bar{\gamma}_{22} = \left(\frac{c_1}{c_1}\right)^2 = 1; \quad \bar{\gamma}_{33} = 1 - 2\bar{\gamma}_{12};$$

где $c_1 = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; c_2 = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$ - скорости распространения объемных и сдвиговых волн в сплошной среде, L - характерная длина. В дальнейшем черта над безразмерными параметрами опускается.

После объединения обезразмеренных величин, уравнения движения (1.1) и производных по времени соотношений обобщенного закона Гука (1.2), приобретают вид:

$$\begin{cases} \dot{v}_i = \sigma_{i\beta,\beta} + F_i \\ \dot{\sigma}_{ij} = \gamma_{ij} v_{i,j} + \gamma_{33}(v_{\beta,\beta} - v_{i,j})\delta_{ij} + \gamma_{ji} v_{j,i}(1 - \delta_{ij}) \end{cases} \quad (i, j, \beta = 1, 2), \qquad (1.6)$$

Определяющие уравнения (1.6) представляют собой неоднородную линейную гиперболическую систему дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, у которой характеристические поверхности в трехмерном пространстве *(x_1, x_2, t)* представляют собой гиперконусы с осями, параллельными оси времени. Система (1.6) имеет два семейства характеристических конусов (рис. 1.2). В нашем случае образующие этих конусов совпадают с бихарактеристиками уравнений (1.6). Бихарактеристикой называются линия, по которой происходит касание любых двух характеристических поверхностей.

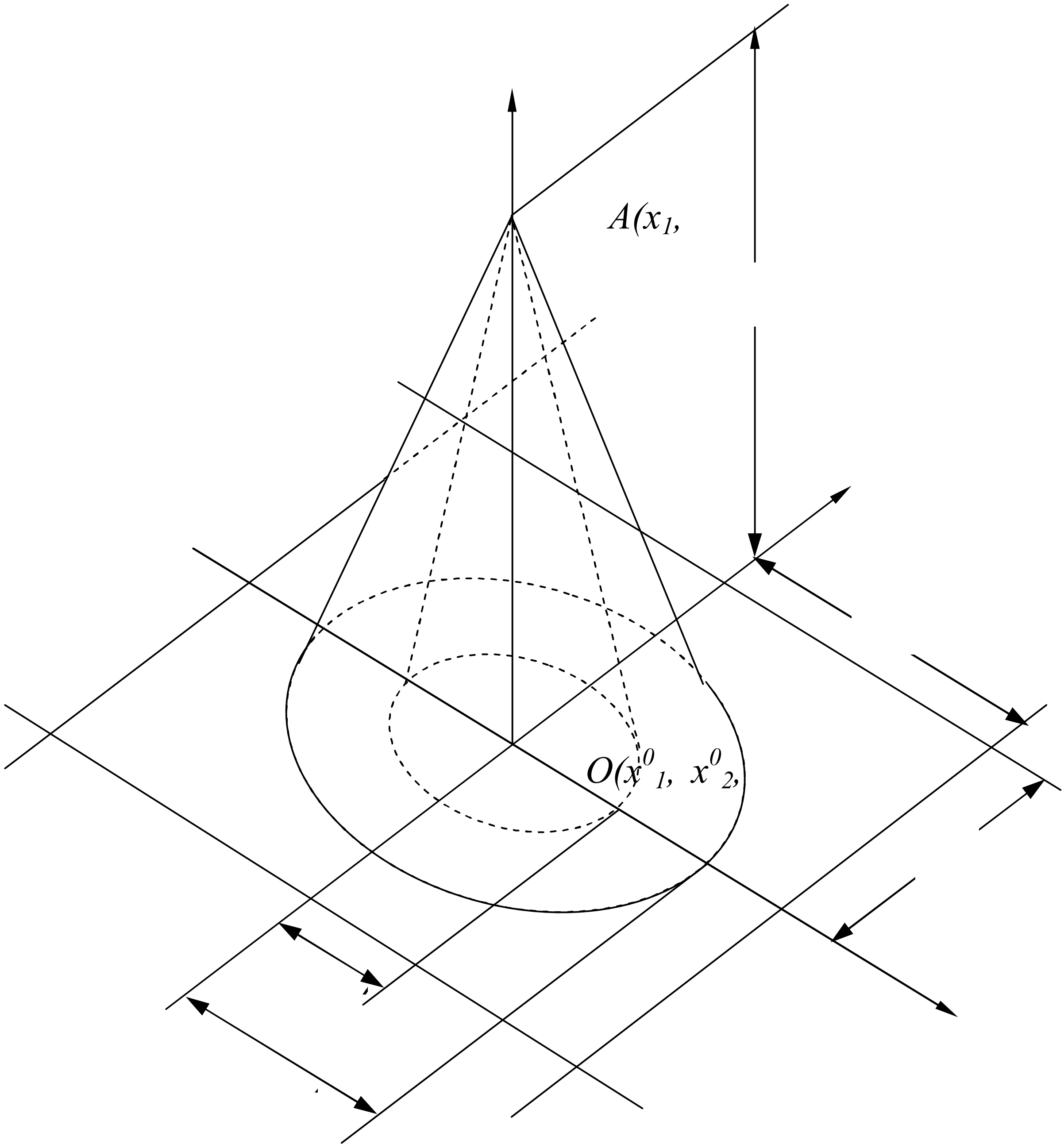


Рис. 1.2. Характеристические конусы.

Для получения уравнения этих бихарактеристик и условий на них, расщепляем двухмерную систему (1.6) на одномерные. Это можно выполнить, если в системе (1.6) поочередно зафиксировать одну из пространственных переменных. Этот прием соответствует идее К.А.Багриновского и С.К.Годунова о расщеплении многомерных гиперболических систем на одномерные [37].

При x_k=*const* ($k \neq j$) имеем:

$$\begin{cases} \dot{v}_i - \sigma_{ij,\bar{j}} = a_{ij} + F_i \\ \dot{\sigma}_{ij} - \lambda_{ij}^2 v_{i,j} = b_{ij} \end{cases} \qquad (\,i, j = 1,\, 2), \tag{1.7}$$

где

$$a_{ij} = \sigma_{i\beta,\beta} - \sigma_{ij,j}; \quad \lambda_{ij} = \sqrt{\gamma_{ij}}; \quad b_{ij} = \gamma_{33}(v_{\beta,\beta} - v_{i,j})\delta_{ij} + \gamma_{ji} v_{j,i}(1-\delta_{ij}).$$

Систему (1.7) можно представить в матричной форме:

$$W^{ij}{}_{,t} + A^{ij} W^{ij}{}_{,j} = B^{ij} \qquad (\,i, j = 1,\, 2),$$

где $W^{ij} = (v_i, \sigma_{ij});\, B^{ij} = (a_{ij} + F_i, b_{ij})$ - векторы, A^{ij} - матрица, определитель, которого равен: $\det A^{ij} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -\lambda_{ij}{}^2 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_{ij}{}^2$.

Собственные значения χ_{ij} матрицы A^{ij} определяются из уравнения

$$\det\left(A^{ij} - \chi_{ij} E\right) = 0$$

(где E- единичная матрица), которые являются вещественными и различными, т.е. $\chi_{ij} = \pm\lambda_{ij}$. Поэтому системы уравнений (1.7) является гиперболической и имеют две действительные характеристики.

Дифференциалы операторы вдоль бихарактеристик таковы:

$$\frac{d(W)}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + W_{,1}\frac{dx_1}{dt} + W_{,2}\frac{dx_2}{dt} \tag{1.8}$$

Если, используя уравнение (1.8), исключить частные производные по t, то уравнения (1.7) будут содержать производные вдоль бихарактеристик и производные в плоскостях t=*const*, и тогда это уравнение можно рассматривать как дифференциальное соотношение вдоль бихарактеристик. После некоторых алгебраических преобразований системы уравнений, (1.7) преобразуется в систему уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} -\dfrac{dx_j}{dt} v_{i,j} - \sigma_{ij,j} = a_{ij} + F_i - \dfrac{dv_i}{dt} \\ -\lambda_{ij}^2 v_{i,j} - \dfrac{dx_j}{dt} \sigma_{ij,j} = b_{ij} - \dfrac{d\sigma_{ij}}{dt} \end{cases} \quad (\,i, j = 1,\ 2). \tag{1.9}$$

Наклон бихарактеристик определяется из условия:

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{dx_j}{dt}, & -1 \\ -\lambda_{ij}^2, & -\dfrac{dx_j}{dt} \end{vmatrix} = 0 \qquad (\,i, j = 1,\ 2), \tag{1.10}$$

а дифференциальные соотношения на характеристиках выводятся из условия:

$$\begin{vmatrix} a_{ij} + F_i - \dfrac{dv_i}{dt}, & -1 \\ b_{ij} - \dfrac{d\sigma_{ij}}{dt}, & -\dfrac{dx_j}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (\,i, j = 1,\ 2). \tag{1.11}$$

Раскрывая определители в равенствах (1.10) и (1.11) можно получить дифференциальное уравнение бихарактеристик и условия на них:

$$dx_j = \pm \lambda_{ij} dt \quad (\,i, j = 1,\ 2), \tag{1.12}$$

$$d\sigma_{ij} \mp \lambda_{ij} dv_i = \left(b_{ij} \mp \lambda_{ij} \left[a_{ij} + F_i \right] \right) dt \quad (\,i, j = 1,\ 2). \tag{1.13}$$

Здесь dv_i означает приращение скорости перемещения вдоль бихарактеристики (1.12) за время dt. Из (1.12) видно, что в каждой из двух гиперплоскостей $(x_j,\ t)$ имеются две пары семейства бихарактеристик, распространяющихся с объемными $(\lambda_{11}$ и $\lambda_{22})$ и сдвиговыми $(\lambda_{12}$ и $\lambda_{21})$ скоростями соответственно (рис. 1.2). В каждой из двух плоскостей $(x_j,\ t)$ имеются по два семейства бихарактеристик положительного и отрицательного направления (рис. 1.3). В уравнениях (1.12) и (1.13) верхний знак соответствует бихарактеристикам положительного, а нижний знак - отрицательного направления. В дальнейшем, это будет учитываться при разработке алгоритма вычислений.

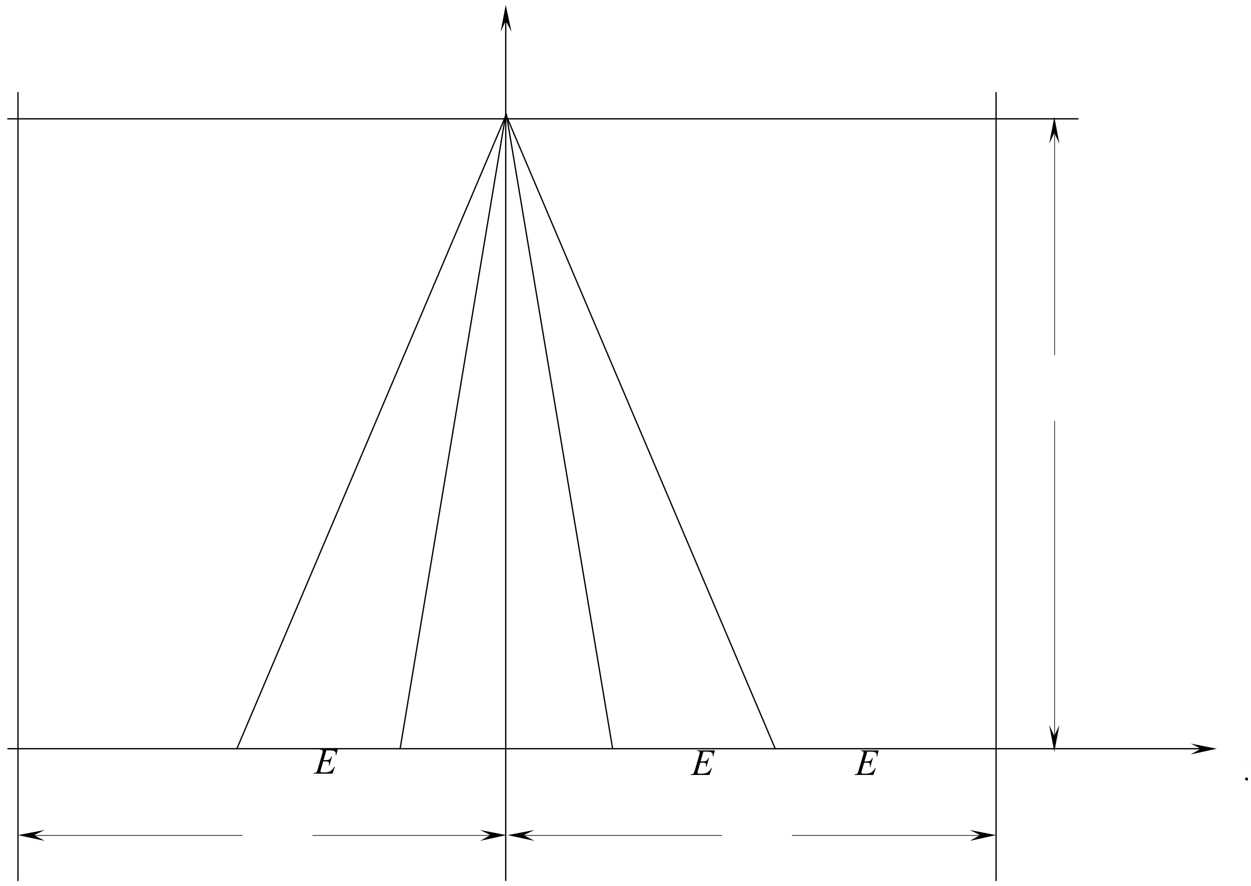


Рис. 1.3. Вид бихарактеристик на плоскости x_2=const.

1.3. Разрешающие разностные уравнения

Пусть тело *D* разбивается на ячейки, образуемые пересечениями координатных поверхностей $x_j=const$. Линейные размеры этих ячеек в направлении Ox_1 и Ox_2 считаются равномерными и равными $h_1=h_2=h$. Пересечение линий образуют узлы. В этих узловых точках ищутся значения искомых функций v_i, σ_{ij} $(i, j = 1, 2)$ в различные моменты времени с шагом τ. Получившаяся сетка оказывается трехмерной. Точечная сетка на основе которых строится разностная схема, помимо упомянутых узловых точек, содержит точки, образованные пересечением бихарактеристик с гиперплоскостями $t=const$. Принимается шаблон, состоящих из узла *O* и точек $E^{\pm}_{ij}$ (точки пересечения бихарактеристик с координатными линиями), лежащих на координатных линиях $x_k=const$ и отстоящих от точек *O* на расстояния $\lambda_{ij}\tau$ *(i, j, k = 1, 2; k* $\neq$ *j)* (рис.1.3.). Координаты точек $E^{\pm}_{ij}$ *(i, j= 1, 2)* находятся из формулы:

$$h_{E^{\pm}_{ij}} = h_0 \mp \lambda_{ij}\tau\ . \tag{1.14}$$

В дальнейшем значениям функций в точке *O* приписывается верхний знак “0”, в точках $E^{\pm}_{ij}$ нижний индекс *ij* и верхний знак “±” (например $\sigma^{\pm}_{ij}$), а в точке *A* дополнительный индекс не приписывается.

На основании описанных точечных схем разрабатываемая ниже методика решения динамических задач позволяет определить скорости v_i и компоненты тензора напряжения σ_{ij} в точке *A* на каком – нибудь слое времени $t=t_0+\tau$, если известны их значения на предыдущем слое $t=t_0$ в точке *O* и прилегающей к ней точках $E^{\pm}_{ij}$. Разностные схемы такого типа называются явными. Эти системы решаются последовательно от одного временного слоя к следующему.

1.3.1. Нахождение разрешающих разностных уравнений

Интегрирование методом трапеции уравнения (1.6) от точки *O* до точки *A* и соотношений (1.13) от точки $E^{\pm}_{ij}$ до точки А позволяют получить выражения следующего вида (далее везде *i, j =1, 2*):

$$\begin{cases} v_i = v_i^0 + \dfrac{\tau}{2}\left(\sigma_{ij,j} + a_{ij} + F_i + \sigma^0_{ij,j} + a^0_{ij} + F^0_i\right) \\ \sigma_{ij} = \sigma^0_{ij} + \dfrac{\tau}{2}\left(\lambda^2_{ij} v_{i,j} + b_{ij} + \lambda^2_{ij} v^0_{i,j} + b^0_{ij}\right) \end{cases} \tag{1.15}$$

$$\sigma_{ij} - \sigma^{\pm}_{ij} \mp \lambda_{ij}\left(v_i - v_i^{\pm}\right) = \frac{\tau}{2}\left(b_{ij} + b^{\pm}_{ij} \mp \lambda_{ij}\left[a_{ij} + a^{\pm}_{ij} + F_i + F^{\pm}_i\right]\right). \tag{1.16}$$

Исключая из (1.16) функции σ_{ij} , v_i при помощи (1.15), можно получить:

$$\lambda^2_{ij} v_{i,j} \mp \lambda_{ij}\sigma_{ij,j} = b^{\pm}_{ij} - \dot{\sigma}^0_{ij} \pm \lambda_{ij}\left(\dot{v}^0_i - a^{\pm}_{ij} - F^{\pm}_i\right) + \frac{2}{\tau}\left(\sigma^{\pm}_{ij} - \sigma^0_{ij} \pm \lambda_{ij}\left[v^0_i - v^{\pm}_i\right]\right), \tag{1.17}$$

где

$$\begin{cases} \dot{v}_i^0 = \sigma_{ij,j}^0 + a_{ij}^0 + F_i^0, \\ \dot{\sigma}_{ij}^0 = \lambda_{ij}^2 v_{i,j}^0 - b_{ij}^0. \end{cases} \tag{1.18}$$

Неизвестные значения функций $\sigma^{\pm}{}_{ij}$; $v^{\pm}{}_i$ и производных $a^{\pm}{}_{ij}$; $b^{\pm}{}_{ij}$ можно вычислить соответственно квадратичным и линейным интерполированием по формуле Лагранжа [33]. При интерполировании по формуле Лагранжа наблюдается эффект "ускорение" волн. И этот эффект имеет место в процессе интерференции волн и поэтому может сильно исказить интерференционную картину. В связи с этим разностная схема, использующая интерполирование может быть использована только в тех случаях, когда интерференция волн или специальным образом учитывается, или же этот процесс слабо выражен. Искажения, вносимые процедурой интерполирования, тем меньше, чем шаг сетки по пространственным переменным. Однако этот путь ограничен объемом памяти используемых ЭВМ и разностная схема на длительных отрезках времени может терять устойчивость [37].

Для улучшения сеточного отношения и устойчивости разностной схемы применяется аппроксимация вместо интерполяции. В этом случае, максимально сближается область зависимости разностных уравнений и область зависимости дифференциального уравнения, а в граничных точках разностные уравнения вычисляются без привлечения дополнительных интерполяций.

В выражении (1.17), значения неизвестных функций и производных в не узловых точках вычисляются по формуле Тейлора в близ узловой точки с точностью до второго и первого порядка, соответственно, относительно шага τ.

Учитывая (1.18) правую часть (1.17) можно записать так

$$b_{ij}^{\pm} - \dot{\sigma}_{ij}^0 \pm \lambda_{ij}\left(\dot{v}_i^0 - a_{ij}^{\pm} - F_i^{\pm}\right) + \frac{2}{\tau}\left(\sigma_{ij}^{\pm} - \sigma_{ij}^0 \pm \lambda_{ij}\left[v_i^0 - v_i^{\pm}\right]\right) =$$

$$= b_{ij}^0 \mp \lambda_{ij}\tau b_{ij,j}^0 - \dot{\sigma}_{ij}^0 \pm \lambda_{ij}\left(\dot{v}_i^0 - a_{ij}^0 \pm \lambda_{ij}\tau a_{ij,j}^0 - F_i^{\pm}\right) +$$

$$+\frac{2}{\tau}\left(\sigma_{ij}^{0}\mp\lambda_{ij}\tau\sigma_{ij,j}^{0}+\frac{\lambda_{ij}^{2}\tau^{2}}{2}\sigma_{ij,jj}^{0}-\sigma_{ij}^{0}\mp\lambda_{ij}\left[v_{i}^{0}\mp\lambda_{ij}\tau v_{i,j}^{0}+\frac{\lambda_{ij}^{2}\tau^{2}}{2}v_{i,jj}^{0}-v_{i}^{0}\right]\right)=$$

$$=\lambda_{ij}^{2}\left(v_{i,j}^{0}+\tau\left[\sigma_{ij,jj}^{0}+a_{ij,j}^{0}\right]\right)\mp\lambda_{ij}\left(\sigma_{ij,j}^{0}+\tau\left[\lambda_{ij}^{2}v_{i,jj}^{0}+b_{ij,j}^{0}\right]+F_{i}^{\pm}-F_{i}^{0}\right).$$

Тогда (1.17) запишется

$$\lambda_{ij}^{2}v_{i,j}\mp\lambda_{ij}\sigma_{ij,j}=\lambda_{ij}^{2}\left(v_{i,j}^{0}+\tau\left[\sigma_{ij,jj}^{0}+a_{ij,j}^{0}\right]\right)\mp\lambda_{ij}\left(\sigma_{ij,j}^{0}+\tau\left[\lambda_{ij}^{2}v_{i,jj}^{0}+b_{ij,j}^{0}\right]+F_{i}^{\pm}-F_{i}^{0}\right)$$

или

$$\sigma_{ij,j}\mp\lambda_{ij}v_{i,j}=\sigma_{ij,j}^{0}+\tau\left[\lambda_{ij}^{2}v_{i,jj}^{0}+b_{ij,j}^{0}\right]+F_{i}^{\pm}-F_{i}^{0}\mp\lambda_{ij}\left(v_{i,j}^{0}+\tau\left[\sigma_{ij,jj}^{0}+a_{ij,j}^{0}\right]\right) \tag{1.19}$$

Складывая и вычитая каждое уравнение системы (1.19) с одинаковыми парами индексов, можно установить:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j}&=\sigma_{ij,j}^{0}+\tau\left[\lambda_{ij}^{2}v_{i,jj}^{0}+b_{ij,j}^{0}\right]+\frac{1}{2}\left(F_{i}^{-}+F_{i}^{+}-2F_{i}^{0}\right)\\ v_{i,j}&=v_{i,j}^{0}+\tau\left[\sigma_{ij,jj}^{0}+a_{ij,j}^{0}\right]+\frac{1}{2\lambda_{ij}}\left(F_{i}^{-}-F_{i}^{+}\right)\end{aligned} \tag{1.20}$$

Процедуры получения разрешающихся систем уравнений (1.6) относительно неизвестных σ_{ij} и v_i $(i,j=1,2)$ в узловых точках исследуемого тела в момент времени $t_n+\tau$ различна для внутренних и граничных точек исследуемой области.

1.3.2. Разрешающие уравнения для внутренних точек области

Порядок получения разностных уравнений для внутренних точек таков:

– производные функции в правой части системы уравнений (1.15) и (1.20) по квадратной сетке для узла $O(x^0_1,\ x^0_2,\ t_0)$, лежащего внутри исследуемой области, определяют центральными разностями:

$$f_{,1}=\left(f_{,1}\right)_{i,j}\quad\frac{1}{2h}\left[\left(f\right)_{i+1,j}-\left(f\right)_{i-1,j}\right];$$

$$f_{,2}=\left(f_{,2}\right)_{i,j}\quad\frac{1}{2h}\left[\left(f\right)_{i,j+1}-\left(f\right)_{i,j-1}\right];$$

$$f_{,11}=\left(f_{,11}\right)_{i,j}=\frac{1}{h^2}\left[\left(f\right)_{i+1,j}-2\left(f\right)_{i,j}+\left(f\right)_{i-1,j}\right];$$

$$f_{,22}=\left(f_{,22}\right)_{i,j}=\frac{1}{h^2}\left[\left(f\right)_{i,j+1}-2\left(f\right)_{i,j}+\left(f\right)_{i,j-1}\right];$$

$$f_{,12}=\left(f_{,12}\right)_{i,j}=\frac{1}{4h^2}\left[\left(f\right)_{i+1,j+1}+\left(f\right)_{i-1,j-1}-\left(f\right)_{i+1,j-1}-\left(f\right)_{i-1,j+1}\right];$$

где h – шаг квадратной сетки; i, j – координатные номера узла, в котором находят значение производных .

– производные $\sigma_{ij,j}$; $v_{i,j}$; a_{ij}; b_{ij} на искомом слое ($t=t_0+\tau$) в уравнении (1.15) определяют из системы уравнений (1.20).

– найденные значения производных и значения неизвестных функций в известном слое ($t=t_0$), которые в начальный момент времени определяют из начальных условии, подставляя в уравнения (1.15) определяют значения неизвестных функции на искомом слое времени $t=t_0+\tau$.

1.3.3. Разрешающие уравнения в граничных точках области

Разностные уравнения для отыскания решения в граничных точках исследуемой области D на слое $t=t_0+\tau$ по заданным или вычисленным значениям искомых величин на слое времени t_0 получаются с помощью системы уравнении (1.15) и (1.19). В расчетах из уравнения (1.19) не могут быть использованы два условия на двух характеристиках, не принадлежащих области D. Тем самым, по сравнению с внутренними точками число уравнений (1.19) сокращается на два. Совокупность оставшихся уравнений (1.15), (1.19) и двух граничных условии является замкнутой линейной системой относительно тринадцати неизвестных (восьми производных и пяти искомых функций). При вычислении значений этих неизвестных функций в граничных точках области D предварительно должны быть вычислены значения первых и вторых производных в направлении осей x_1 и x_2 по значениям самих функций в узловых точках на слое t_0. При таких вычислениях на границе не всегда возможно пользоваться центрированными разностями, как это имело место для внутренних точек. Здесь по необходимости нужно использовать разности “вперед” или “назад”, использующие значения функции в соседних узловых точках в одном направлении. Например, на границе $x_1=0$:

$$\left(f_{,1}\right)_{i,j}=\frac{1}{2h}\left[4\left(f\right)_{i+1,j}-\left(f\right)_{i+2,j}-3\left(f\right)_{i,j}\right];$$

$$\left(f_{,2}\right)_{i,j}=\frac{1}{2h}\left[\left(f\right)_{i,j+1}-\left(f\right)_{i,j-1}\right];$$

$$\left(f_{,11}\right)_{i,j}=\frac{1}{h^2}\left[\left(f\right)_{i,j}-2\left(f\right)_{i+1,j}+\left(f\right)_{i+2,j}\right];$$

$$\left(f_{,22}\right)_{i,j}=\frac{1}{h^2}\left[\left(f\right)_{i,j+1}-2\left(f\right)_{i,j}+\left(f\right)_{i,j-1}\right];$$

$$\left(f_{,12}\right)_{i,j}=\frac{1}{4h^2}\left[4\left(f\right)_{i+1,j+1}-\left(f\right)_{i+2,j+1}-3\left(f\right)_{i,j+1}-4\left(f\right)_{i+1,j-1}+\left(f\right)_{i+2,j-1}+3\left(f\right)_{i,j-1}\right].$$

Для моделирования на бесконечности условий излучения устанавливаем произвольным образом границы, которые достаточно далеко находятся от трещины и на исследуемом интервале времени (0; T) ударные волны до них не дошли. Устанавливаем три границы, первые два задаются уравнением $|x_2|=6L+2d$ (с правой и левой стороны тела), а третью уравнением $x_1=7L$ (нижняя граница), и задаем на них следующие условия:

$$\sigma_{ij}=0,\quad v_i=0,\quad i,j=1,\ 2.$$

Использование разработанной явной разностной схемы второго порядка точности позволяет установить значения неизвестных величин в узлах $t_0+\tau$ временного слоя по известным их значениям в узлах предыдущего слоя - t_0.

1.4. Точность и устойчивость численного решения

Система разностных уравнений (1.15) получается в результате интегрирования системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.6) и должна приводить к решению, совпадающему с решением исходной системы. Общая теория уравнений в частных производных требует для этого определенных ограничений на сеточное отношение шагов по времени и координате в задачах с начальными и граничными условиями, которые могут быть представлены в виде [31]

$$\left|\frac{\tau c_{ij}}{h}\right| \le 1, \tag{1.21}$$

где c_{ij} являются коэффициентами гиперболической системы. Физически такое ограничение означает, что решение в вершине гиперконуса выражается через начальное значение внутри области, ограниченной поверхностью гиперконуса, т.е. решение в искомой точке определяется через область влияния.

В любой точке рассматриваемой области существует ошибка метода, возрастающая с увеличением времени расчета. Влияние таких ошибок в соседних точках на результат решения в искомой точке становится меньше по мере уменьшения сеточного отношения. Однако этот путь неприемлем из-за ограниченности объёмов памяти используемых ЭВМ и разностная схема на длительных отрезках времени может потерять устойчивость [32, 33].

Необходимое условие устойчивости сеточно-характеристического метода, вытекающего из условия Неймана (спектральный радиус расширенной матрицы не превосходит единицы) отыскивается в виде

$$\max_{i,j=1,2}\left|\frac{\tau \lambda_{ij}}{h}\right| \le 1, \tag{1.22}$$

которое выражает условие Куранта – Фридрихса – Леви. В дальнейшем при проведении расчетов шаги пространственно – временной сетки выбираются согласно условиям устойчивости (1.21) и (1.22). Многочисленными расчетами экспериментально проверено, что условие $\left|\frac{\tau}{h}\right| \le \frac{1}{2}$ обеспечивает устойчивость счета для большого момента времени [37].

Для проверки точности развиваемой расчетной схемы Тарабрина была решена задача Ламе. Сравнение разностного решения с известным результатом аналитического решения в зависимости от времени показывает незначительную погрешность. А также было проведено сравнение численных методов Тарабрина и Клифтона. Для простоты сравниваются результаты расчетов только для однородной части исследуемого тела. Однородная полоса с прямоугольным поперечным сечением конечных размеров в системе координат x_1, x_2 занимает область $0 \le x_1 \le L$, $|x_2| = l$. В прямоугольной области получено численное решение задачи методом пространственных характеристик (метод Клифтона) и с применением расщепления (метод Тарабрина). Сравнение этих решений показывает, что отличие может составить от 11% до 25% (относительное отличие) на самом интенсивном фронте продольной волны. Во внутренних и граничных точках эти решения практически совпадают, а в угловых точках резко отличаются. Заметная разница в результатах решения объясняется следующим образом. В методе Клифтона в угловой точке разрешающие уравнения получаются за счет привлечения уравнений меры вращения, а в методе Тарабрина путем дифференцирования граничных функций. Следует отметить, что результаты v_i; σ_{ij}, найденные методом Тарабрина изменяются в угловых и прилегающих к ним точках весьма гладко, а они же, полученные методом Клифтона, быстро возрастают даже в начальные моменты времени. Полученную точность решения методом Тарабрина можно считать вполне удовлетворительным для инженерных целей, тем более, качественный характер поведения искомых величин передан правильно [37].

Таким образом, разработанная в разделах 1.2.-1.3. настоящей главы методика расчета, может быть использована для анализа напряженно - деформированного состояния и особенностей распространения динамических возмущений в плоских однородных и неоднородных телах при действии продольных, поперечных нагрузок.

1.5. Динамика упругого массива и его дневной поверхности при сбросе вертикальных напряжений на трещине

Расчет произведен для грунта с параметрами: $\rho=1$, $c_1=\sqrt{\gamma_{11}}=1$, $c_2=\sqrt{\gamma_{12}}=0{,}577$ при глубине и ширине трещины соответственно $L=1$, $d=0{,}1$ на интервале времени (0; 6). Скачок напряжений на трещине задается в виде (рис.1.4.)

$$P_1(x,t)=20\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-10t}\,H(t),\;\; P_2(x,t)=0\,.$$

В расчетах шаги по пространственной сетке $h_1=h_2=h=0{,}05$ и по временной $\tau=0{,}025$, а параметр дельтаобразной функции $\varepsilon = h$.

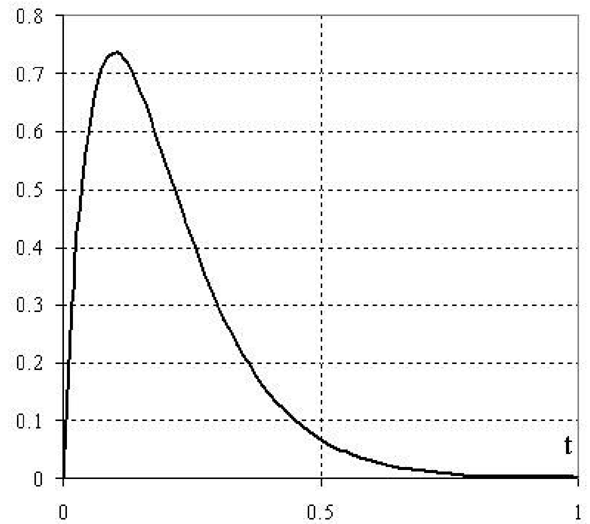
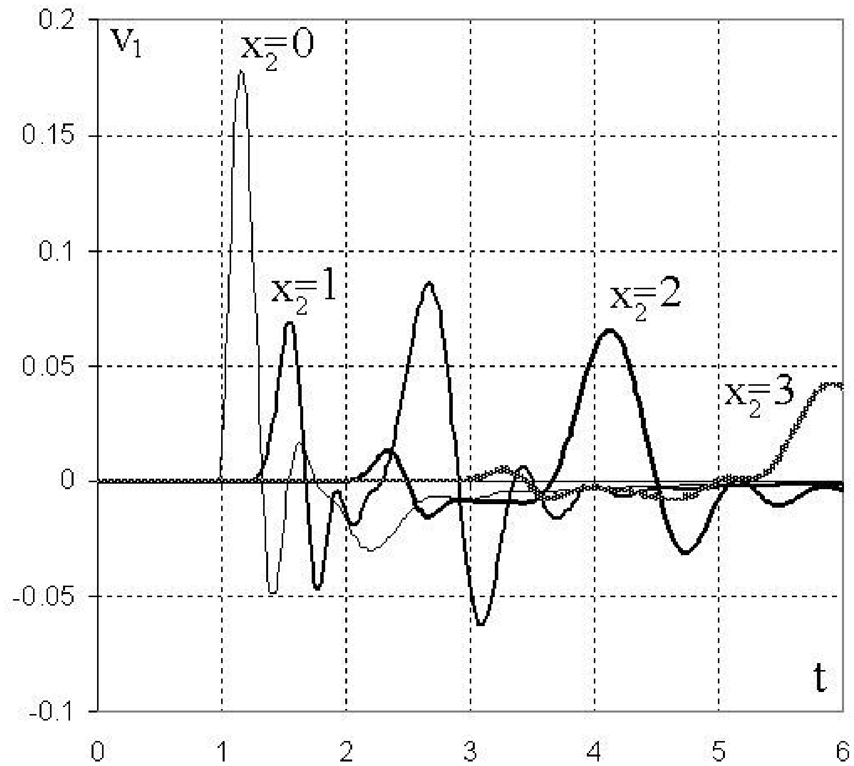


Рис. 1.4. Скачок напряжений на трещине.

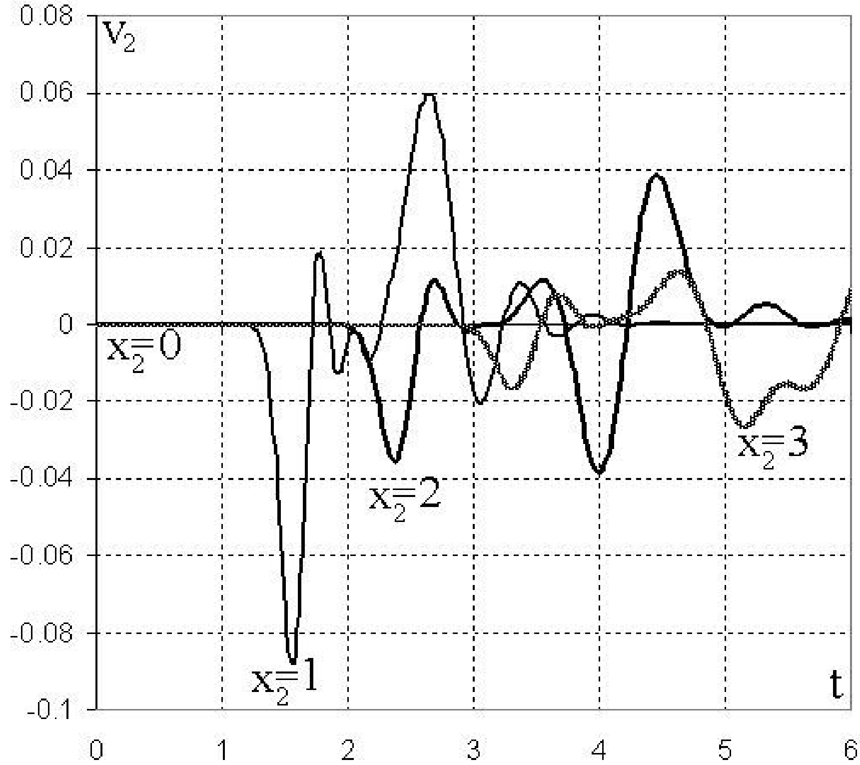
Скорости распространения продольных и поперечных волн в безразмерных величинах составляют $c_1=1$ и $c_2=0{,}577$ соответственно, из чего следует, что объемные (продольные) и сдвиговые (поперечные) волны от трещин к точке $O(0;\,0)$ придут за время $t_1=1$ и $t_2=1{,}73$ соответственно, а в точку $A(0;\,1)$ за $t_1=1{,}35$ и $t_2=2{,}33$, в точку $B(0;\,2)$ за $t_1=2{,}15$ и $t_2=3{,}71$ и в точку $C(0;\,3)$ за $t_1=3{,}07$ и $t_2=5{,}31$. На рис.1.5. в указанные моменты времени можно заметить начало всплеска скорости колебания. И показывает естественный колебательный характер движения среды. В эпицентре (точка *O*) $v_2=0$, т.к. сброс напряжении происходит симметрично и параллельно оси Ox_1.

На рис.1.6. представлены осциллограммы напряжений σ_{22} на поверхности $x_1=0$ и на глубине $x_1=0,5$ в точках $x_2=0;$ $x_2=1;$ $x_2=2;$ $x_2=3$. Напряжения меняют знак: в эпицентре в основном это растягивающие напряжения. А вдали от него на дневной поверхности происходит колебательный процесс со сменой сжимающих напряжений на растягивающие и наоборот.

На рис.1.7. показаны осциллограммы скоростей v_1 и v_2 на глубине $x_1=0.5$ в точках $x_2=0;$ $x_2=1;$ $x_2=2;$ $x_2=3$. Сравнивая их с осциллограммами на дневной поверхности можно заметить схожесть графиков. На дневной поверхности амплитуда колебаний больше чем на глубине.

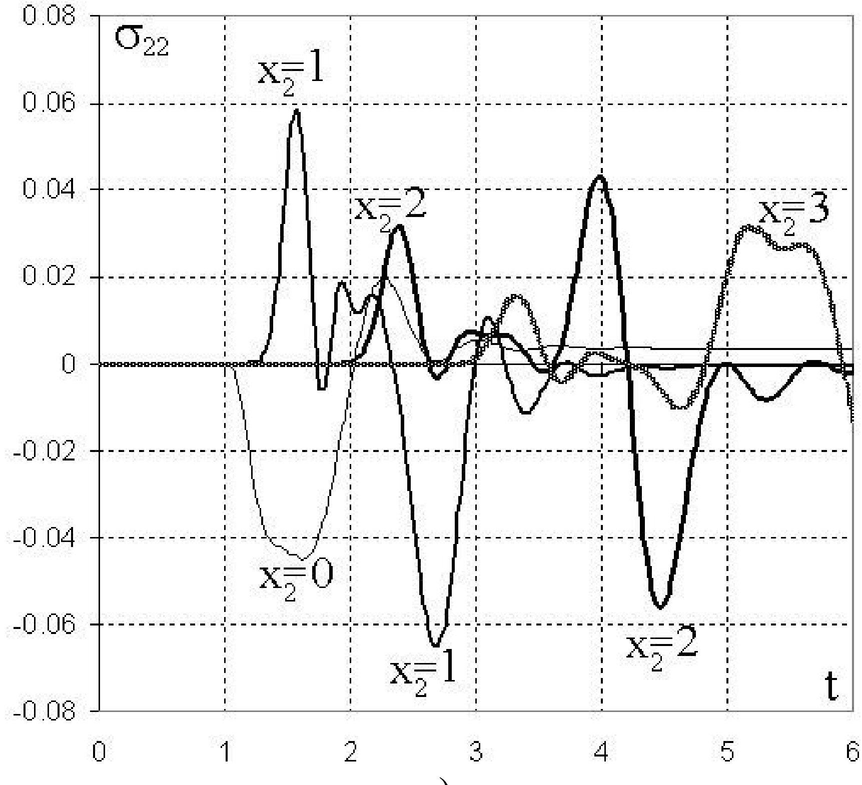


а)

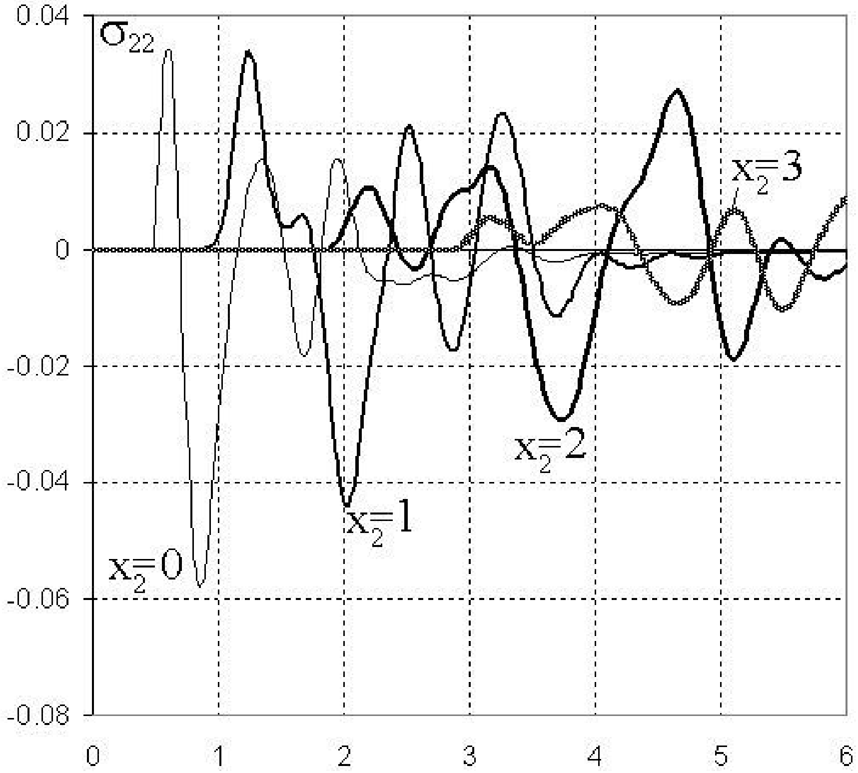


б)

Рис. 1.5. Осциллограммы а) скоростей v_1 и б) скоростей v_2 дневной поверхности при x_1=0, x_2=0; 1; 2; 3



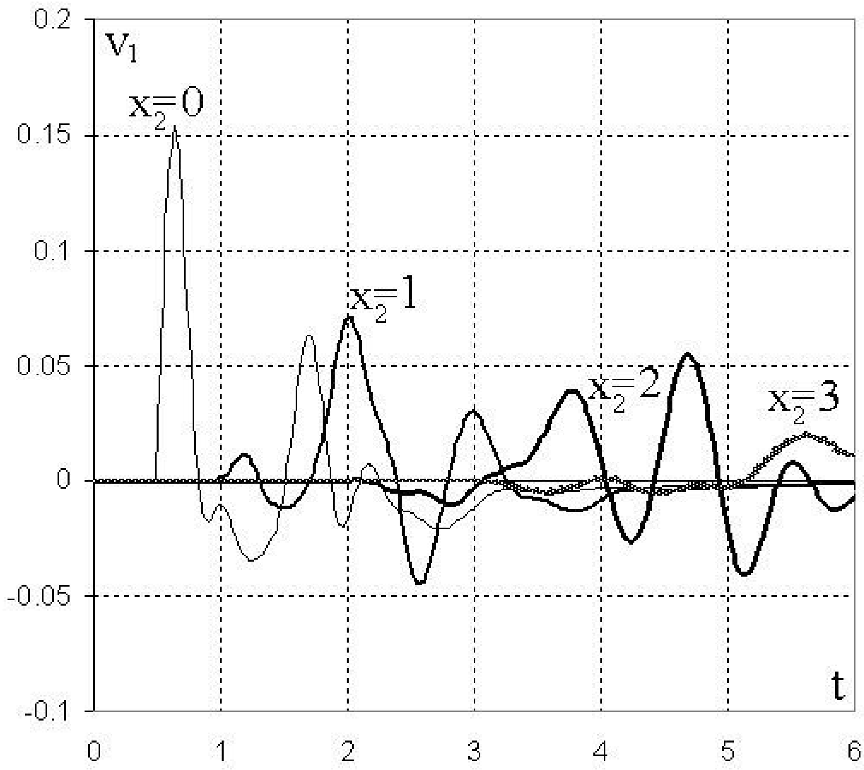
а)



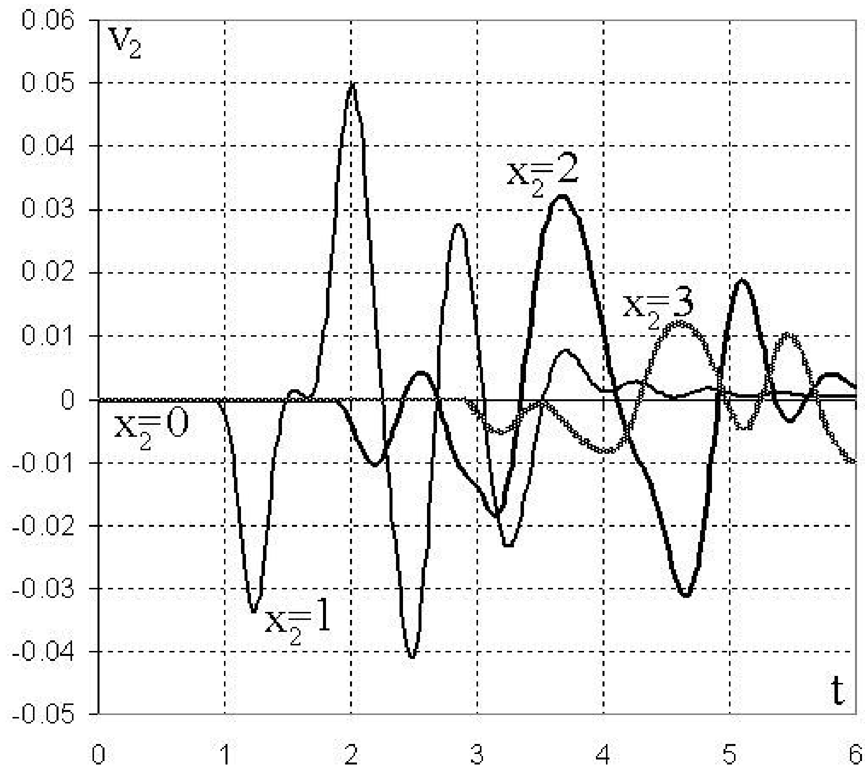
б)

Рис. 1.6. Осциллограммы напряжений σ_{22}:

а) на поверхности $x_1=0$ и б) на глубине $x_1=0{,}5$ при $x_2=0$; 1; 2; 3.



а)



б)

Рис. 1.7. Осциллограммы скоростей:

а) v_1 и б) v_2 на глубине x_1=0,5 (x_2=0; 1; 2; 3).

На рис.1.8. и рис.1.9. показаны срезы скорости v_1 и напряжений σ_{11} и σ_{22} на плоскости $x_2 = 0$ (в силу симметричности воздействия в данной плоскости $v_2=0$) в момент времени $t = 1$, $t = 1,5$ и $t = 2$. Можно заметить, что в момент времени $t = 1$ волна только добегает до дневной поверхности (нет отраженной волны) и скорость v_1, всё ещё, симметрична, а напряжения σ_{11} и σ_{22} антисимметричны относительно оси, проходящей вдоль трещины, что соответствует данному воздействию. А также этот момент соответствует моменту когда, внешнее воздействие снято, и среда начинает свободно противодействовать. Это видно по изменению направления скорости v_1 и напряжениям рядом с трещиной, которые перешли из сжимающих напряжений в растягивающие и наоборот их растягивающих напряжений в сжимающие.

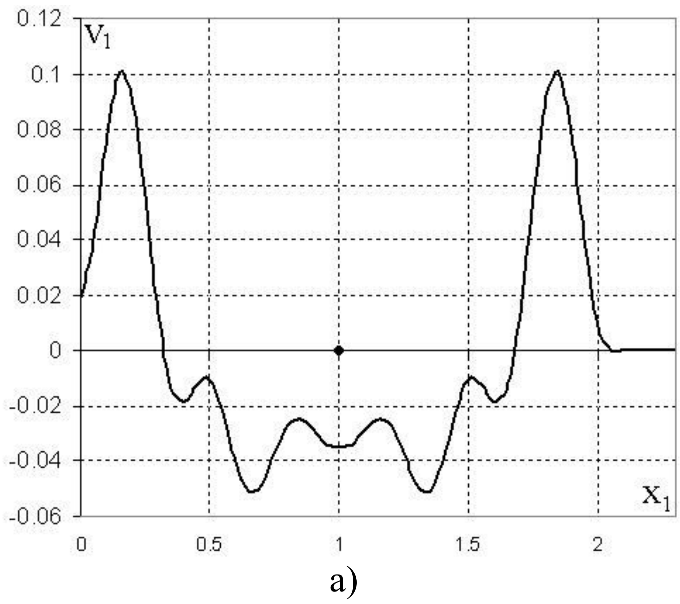
В момент времени $t = 1,5$ отраженная от дневной поверхности волна добегает до середины расстояния до трещины, а в момент $t = 2$ добегает до трещины, при этом теряется симметричность графика. Сравнивая на рисунках амплитуды колебания, можно заметить, что с течением времени амплитуда убывает, это связано с тем, что в эти моменты нет внешнего воздействия, а среда противодействует, заставляя волну гаснуть (волна теряет энергию).

На рис.1.10. представлены векторные поля скоростей в среде при сбросе вертикальных напряжений на трещине. В начальный момент на трещине возникают две ударные волны: объемная, которая движется со скоростью c_1, и сдвиговая, скорость которой c_2. Объемные волны опережают сдвиговые. На рисунках им соответствуют кольцевые зоны в окрестности трещины. На фронтах ударных волн выполняются условия на скачки [49]:

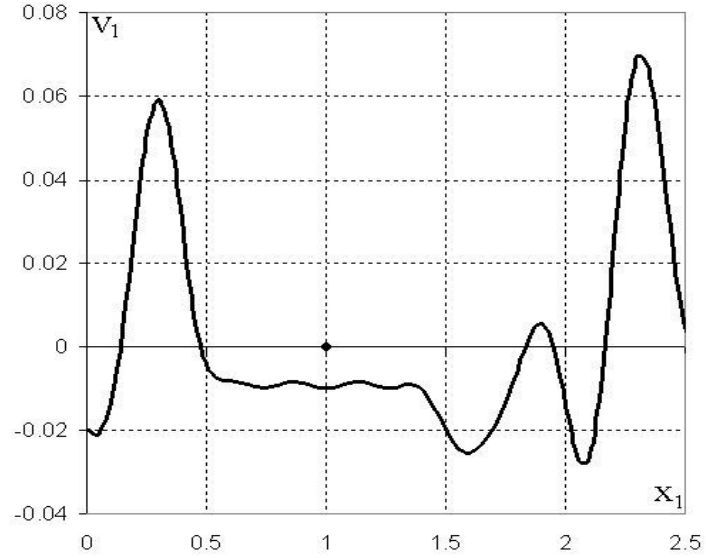
$$\left[v_j\right]_{Fr_k} = -\left(\rho c_k\right)^{-1}\left[\sigma_{ij}\right]n_i, \quad k = 1,2.$$

Волны слабые ударные, т.к. сброс напряжений непрерывен и начинается с нуля. Перед фронтом первой ударной волны до достижения ею дневной поверхности среда покоится.

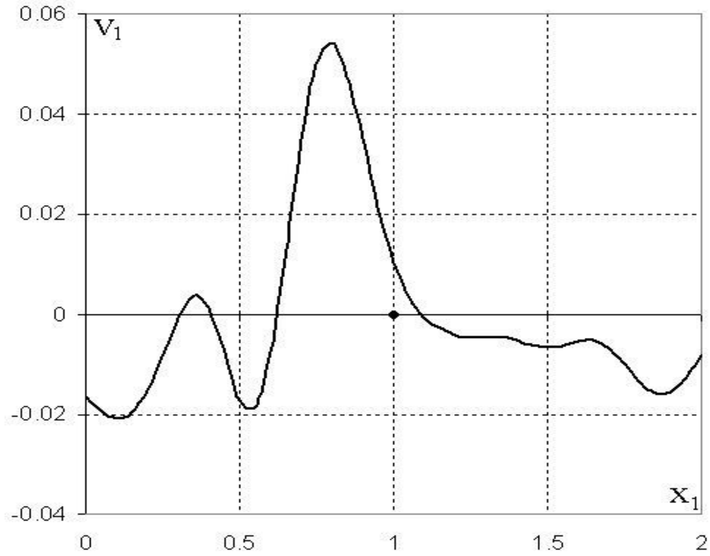
В момент времени $t = 0{,}5$ объемная волна пробегает расстояние *0,5*, а сдвиговая волна *0,29*, что и видим на рис.1.10.а). Можно заметить, что на



а)



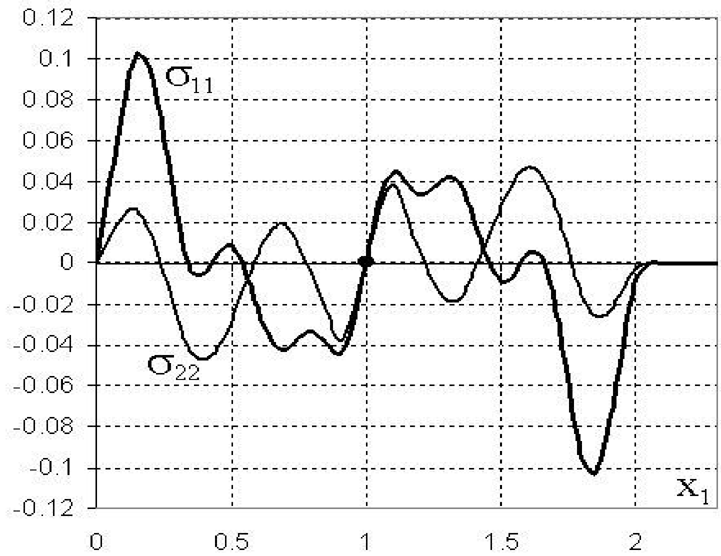
б)



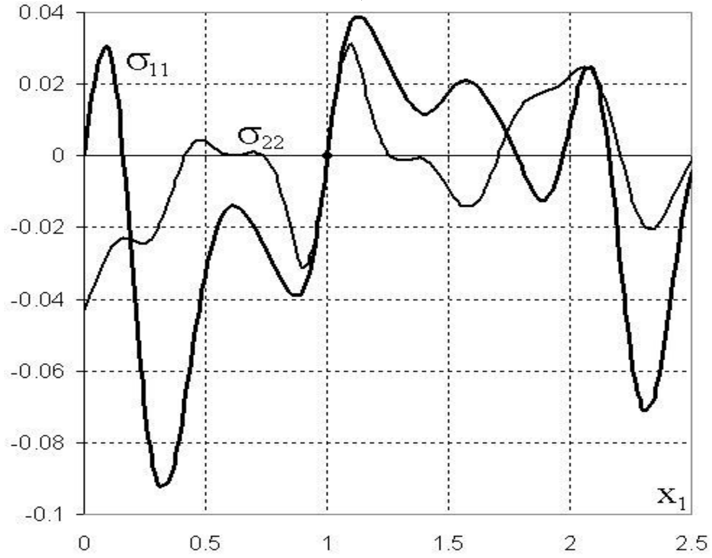
в)

Рис. 1.8. Срез скоростей v_1 на плоскости $x_2 = 0$:

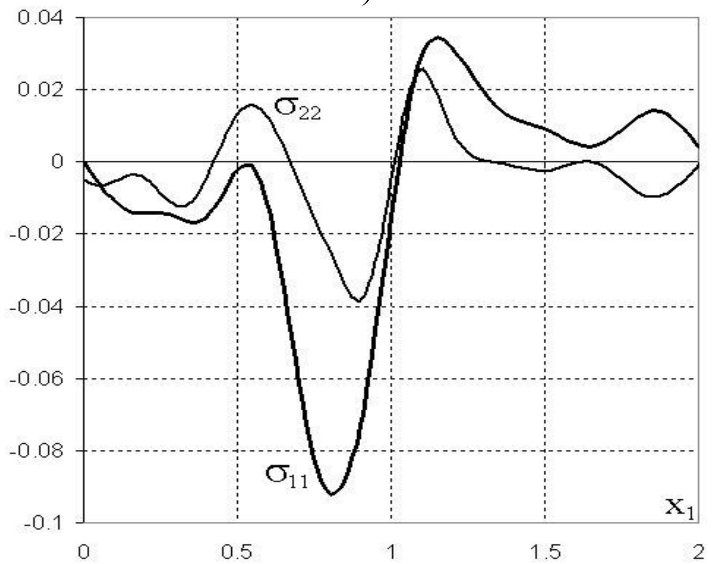
в моменты времени а) t = 1, б) t = 1,5 и в) t = 2.



а)



б)



в)

Рис. 1.9. Срез напряжении σ_{11} и σ_{22} на плоскости $x_2 = 0$:
в моменты времени а) t = 1, б) t = 1,5 и в) t = 2.

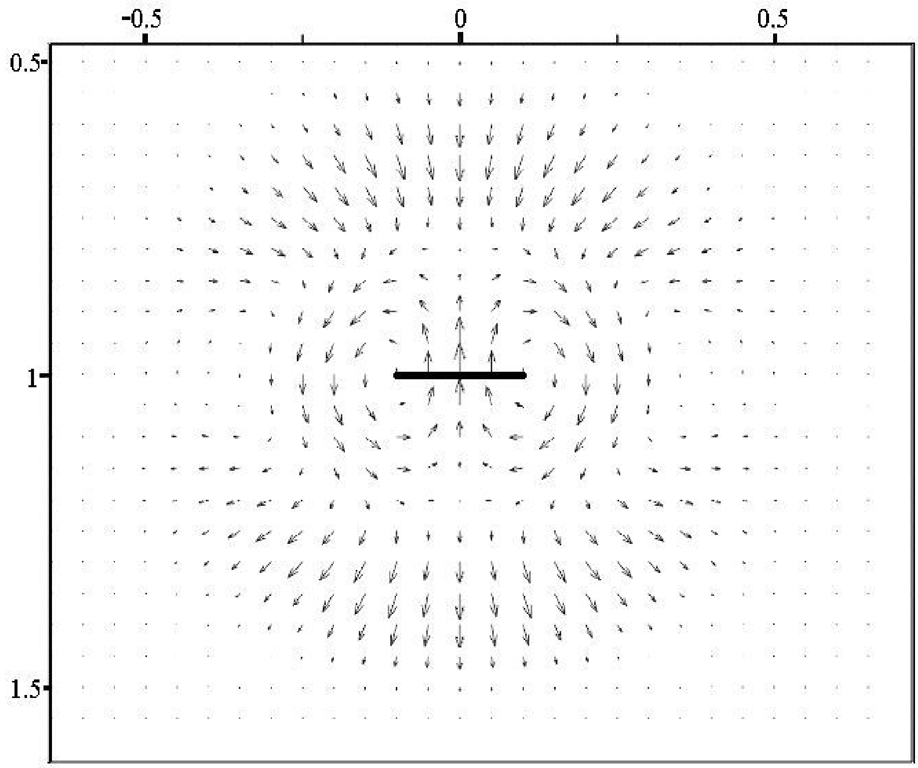
концах трещины образовалось вихревое поле, что характеризует сдвиговые волны, и от средней части трещины по перпендикулярному направлению сдвиговая волна не распространяется, а объемная от концов трещины по направлениям параллельных трещине. Это объясняется типом воздействия на трещине. Края трещины работают как источники цилиндрических сдвиговых волн.

На рис.1.10.а) волны еще не достигли дневной поверхности. На рис.1.10.б) можно заметить, что волна добежала до дневной поверхности и еще не отобразилась (сохраняется полная симметрия относительно трещины). Из-за отсутствия воздействия, к этому моменту, противодействующие перемещения захватывают всю трещину.

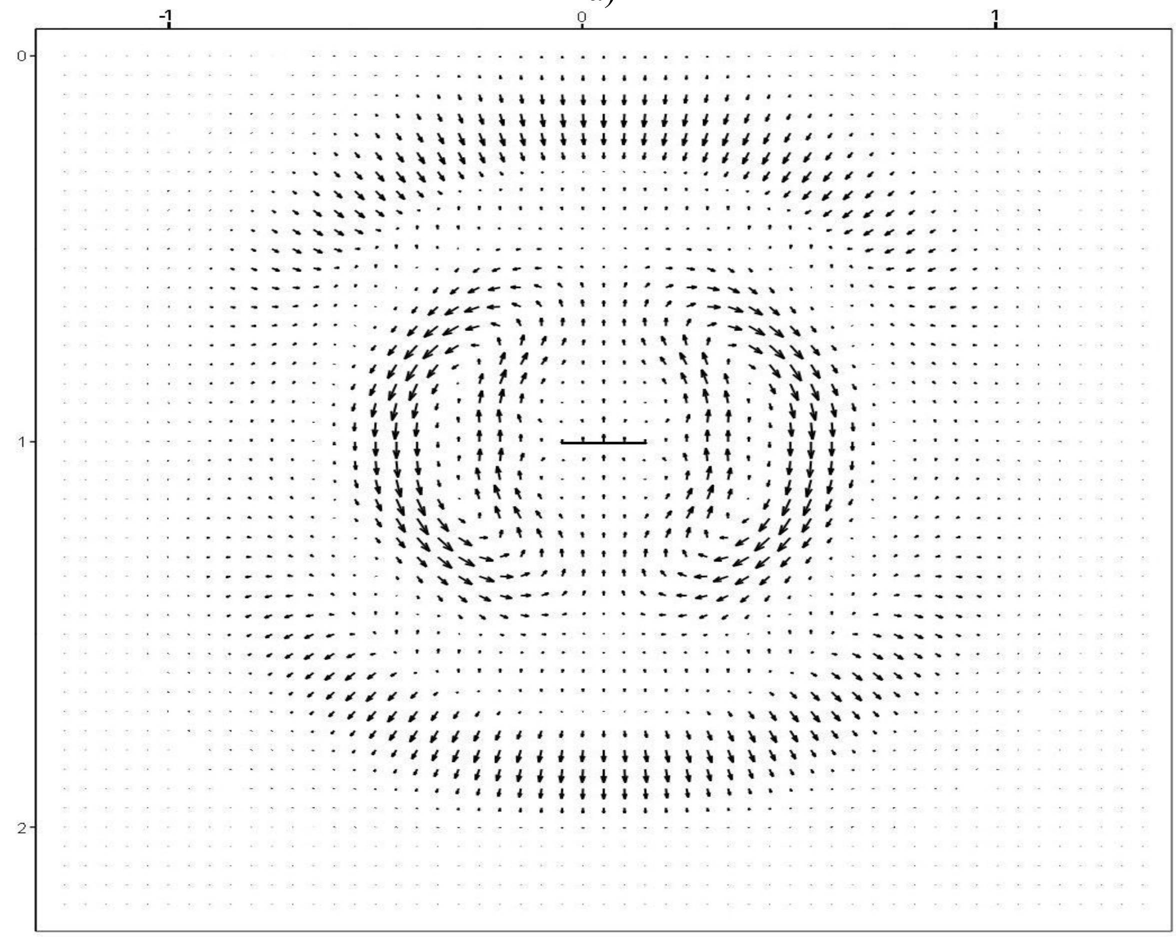
На рис.1.11.а) показан момент, когда волна должна отразиться от свободной границы и добежать до середины отрезка соединяющий с трещиной, и как раз таки на рисунке наблюдается этот процесс. На рис.1.11.б) момент, когда отраженная объемная волна добежала до трещины, а сдвиговая пройдя сквозь эту отраженную волну (с некоторыми искажениями), добежала до дневной поверхности и начала процесс отражения. Возникает сложная дифракционная картина взаимодействия падающих и отраженных ударных волн, формируется сложное напряженно-деформированное состояние среды, которое представлено на рис.1.10. и рис.1.11.

Взаимодействие объемных и сдвиговых волн с дневной поверхностью и между собой (после отражения) порождают разные волны, среди них релеевские. На рис.1.11. можно заметить, как начинает формироваться волна вдоль дневной поверхности, образуя поверхностную волну Релея. В данной среде она распространяется со скоростью c_R=$0,918c_2$, т.е. близко к скорости распространения сдвиговой волны. Волны, идущие от трещины вниз, не встречая препятствий, рассеиваются с глубиной и с течением временем.

На рис.1.12. и рис.1.13. построены изолинии первых и вторых инвариантов тензора напряжении в моменты времени t = 1,5 и t = 2. Первый



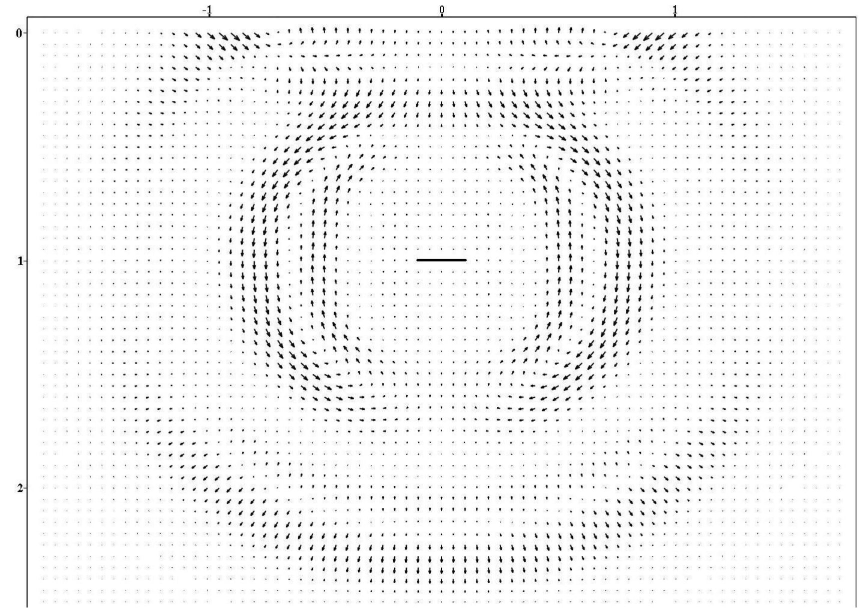
а)



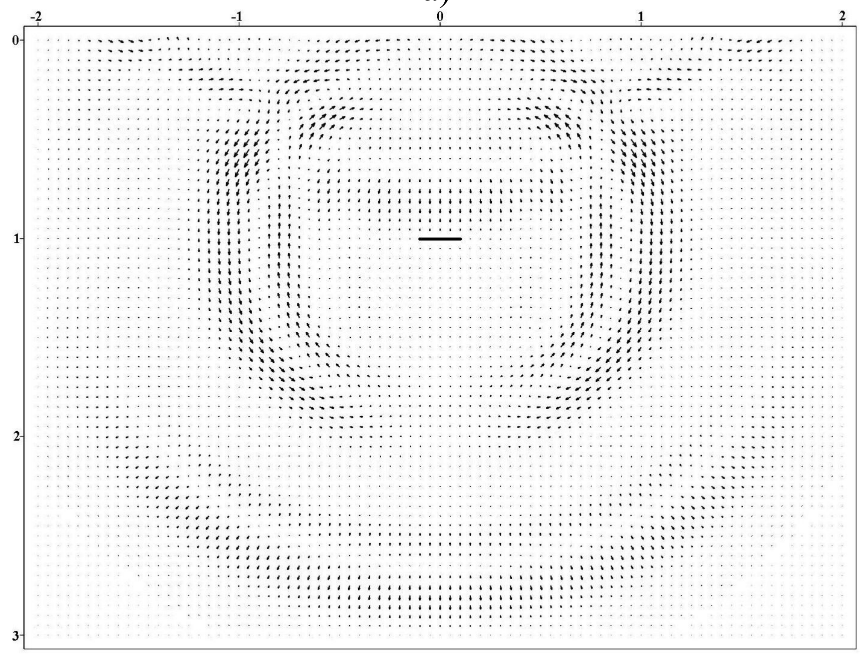
б)

Рис. 1.10. Векторное поле скоростей до отражения ударных волн:

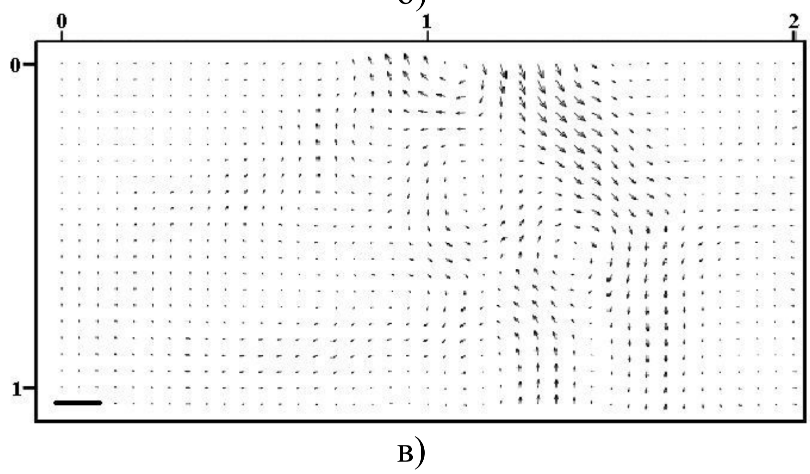
а) t =0,5; б) t =1.



а)



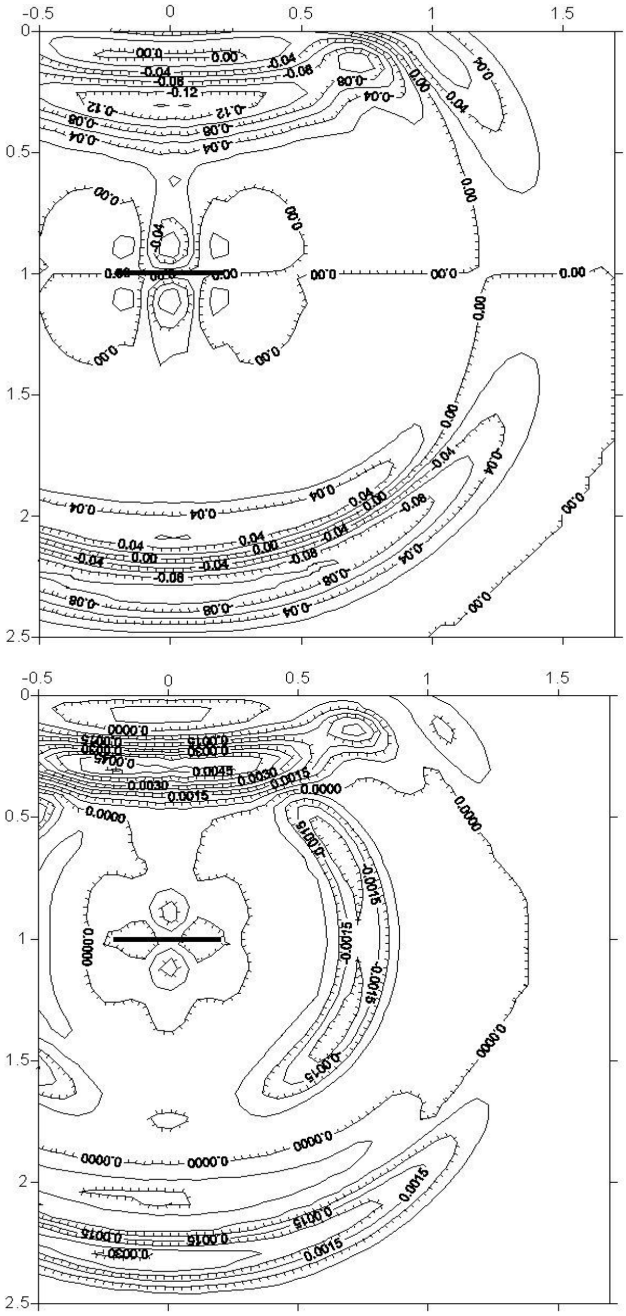
б)



в)

Рис. 1.11. Векторное поле скоростей после отражения ударных волн: а) t = 1,5; б) t = 2; в) t = 3.

инвариант определяет давление в среде, второй – интенсивность касательных напряжений. Как видим, напряжения в верхней зоне от дифракции волн на дневной поверхности в полтора раза превышают напряжения в свободной нижней зоне рассеивания упругих волн (0,12 и 0,8 для а и 0,0045 и 0,0030 для б)



а) б)

Рис. 1.12. Изолинии а) первых и б) вторых инвариантов напряжения при t =1,5.

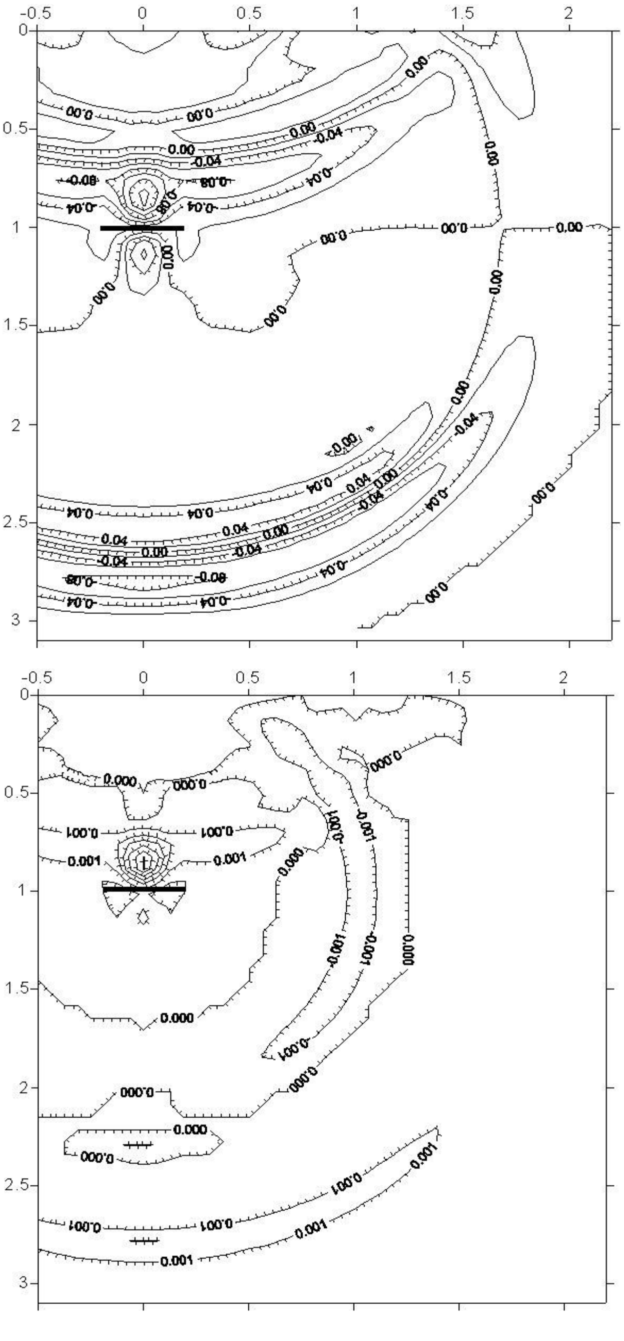
Переход к размерным величинам проводим по следующим формулам:

$$t=\frac{\bar{t}\,L}{c_1};\quad x_i=\bar{x}_i L;\quad v_i=\bar{v}_i c_1;\quad \sigma_{ij}=\bar{\sigma}_{ij}\rho c_1^2;\quad F_i=\frac{\bar{F}_i\rho c_1^2}{L}$$

где черта указывает на безразмерные величины. Обычно в сейсмологии для грунтов используют параметры *ρ = 1600 кг/м*^{3}, c_2*=2000 м/с,* $c_1=\sqrt{3}\,c_2$*=3464 м/с*.

Учитывая последние параметры, если взять глубину расположения трещины *L = 100м*, расчетный интервал времени (0; 6) окажется в реальности (0; 0,17с), длина трещины *2d = 20м*, в эпицентре *O*(0; 0) максимальная по абсолютной величине скорость v_1 *= 622,8м/с*, а напряжение σ_{22}*=766МН/м*^{2}.

Если взять *L=100км*, то расчетный интервал времени будет (0; 2,88 мин), длина трещины *2d = 20км*. А в эпицентре максимальная по абсолютной величине скорость v_1 и напряжение σ_{22} не изменятся (v_1*= 622,8м/с*, σ_{22}*=766МН/м*^{2}*)*.



а) б)

Рис. 1.13. Изолинии а) первых и б) вторых инвариантов напряжении при t =2.

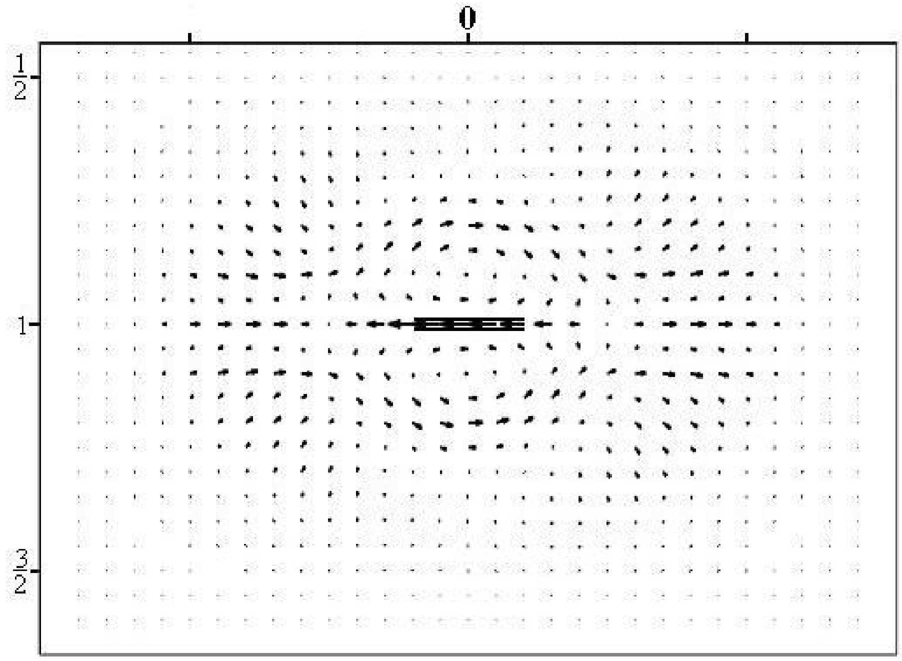
1.6. Динамика упругого массива и его дневной поверхности при сбросе горизонтальных напряжений на трещине

Расчет произведен для среды с безразмерными параметрами: $\rho=1$, $c_1=\sqrt{\gamma_{11}}=1$, $c_2=\sqrt{\gamma_{12}}=0.577$ при глубине и ширине трещины соответственно *L=1,* *d=0.1,* на интервале времени (0, 6). Скачок напряжений на трещине задается в виде (рис. 1.4.)

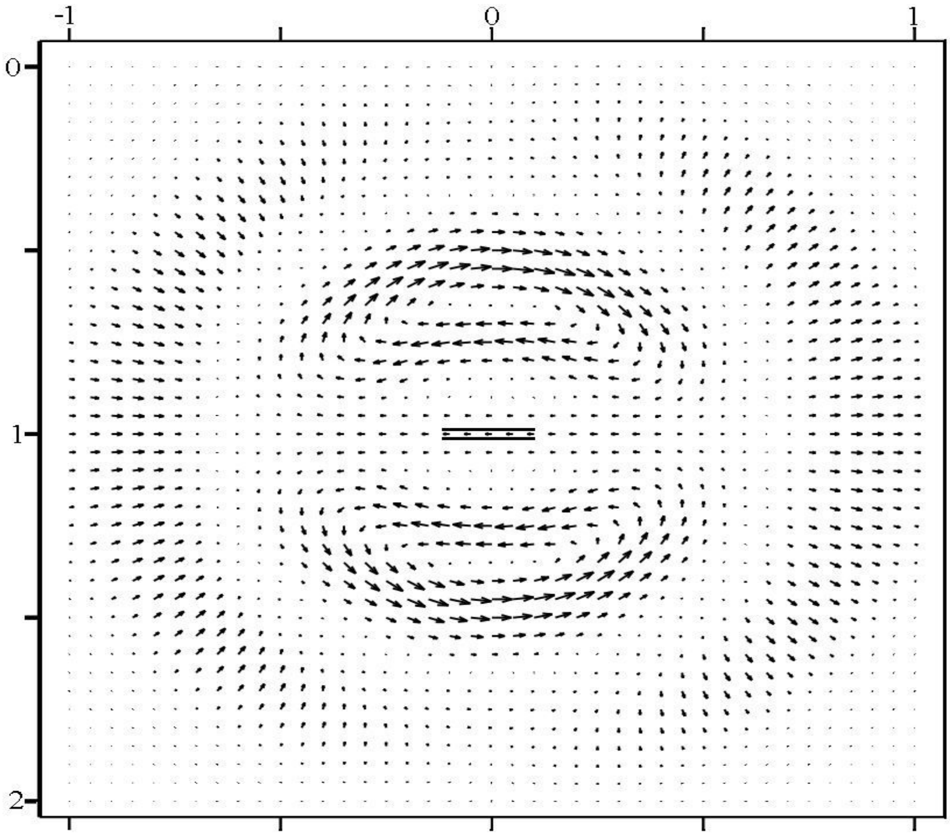
$$P_1(x,t) = 0\,;\; P_2(x,t) = 20 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-10t}\, H(t)\,.$$

В расчетах шаги по пространственной сетке $h_1=h_2=h=0{,}05,$ по временной $\tau=0{,}025$, а параметр дельтаобразной функции $\varepsilon = h$.

В момент времени $t=0{,}5$ объемная волна пробегает расстояние *0,5*, а сдвиговая волна *0,29*, что и видим на рисунке 1.14а. Можно заметить, что от поверхности трещины распространяется вихревое поле, что характеризует сдвиговые волны, а объемная волна распространяется от концов трещины. Это объясняется типом воздействия на трещине. Края трещины работают как источники цилиндрических объемных волн.



а)



б)

Рис. 1.14. Векторное поле скоростей: а) при t =0,5, б) при t =1.

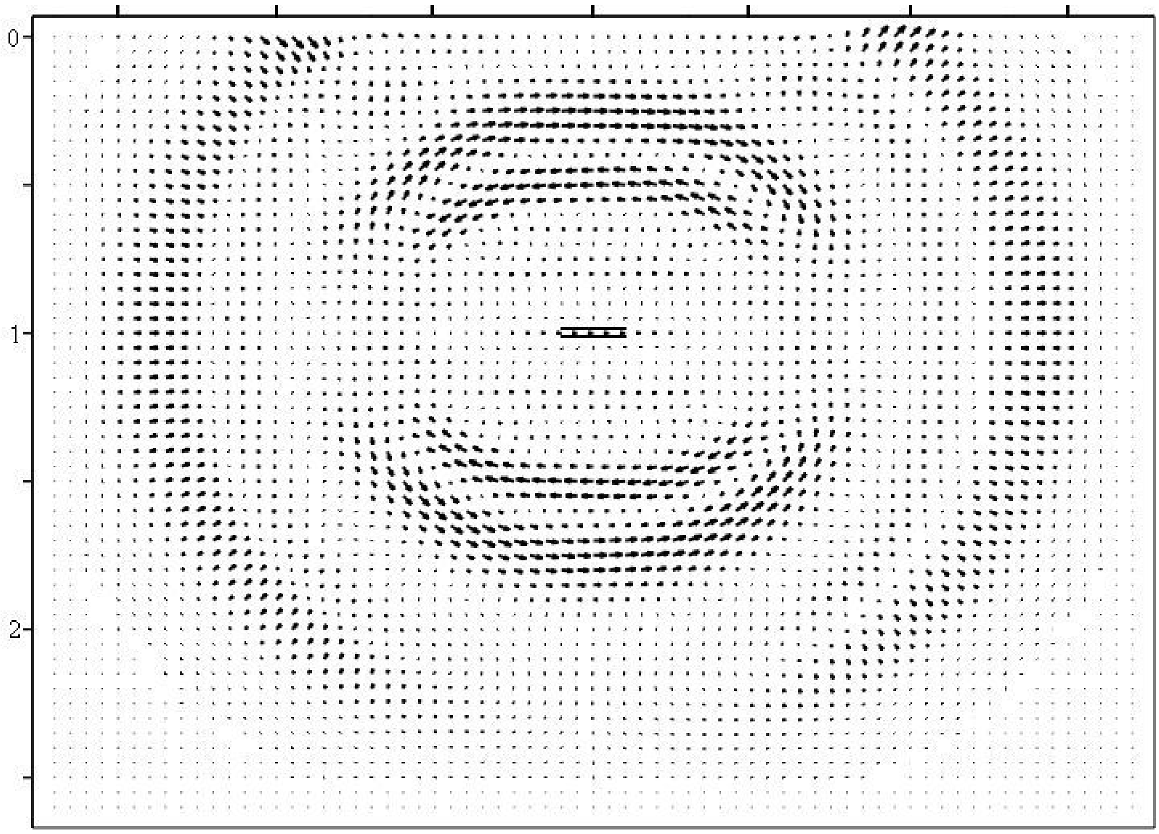
В момент времени t = 1 объемная волна сжатия – расширения пробегает расстояние до поверхности, а сдвиговая волна *0,577L*, что и видим на рис.1.14б. Можно заметить вихревую зону, распространяющуюся вверх и вниз от трещины, порождаемую сдвиговыми деформациями на трещине. Ее окаймляет и опережает зона объемных расширений – сжатий, интенсивность скоростей перемещений в которой меньше, чем за фронтом сдвиговой волны.

На рис. 1.15. – 1.19. представлены векторные поля скоростей в среде при сбросе горизонтальных напряжений на трещине в моменты времени t=1,5, t=1,725, t=2,5, t=2,725, t=3,25. Поскольку картинка антисимметрична относительно вертикальной оси далее на рисунках представлена только правая половина (в левой половине направление векторов меняется на противоположное).

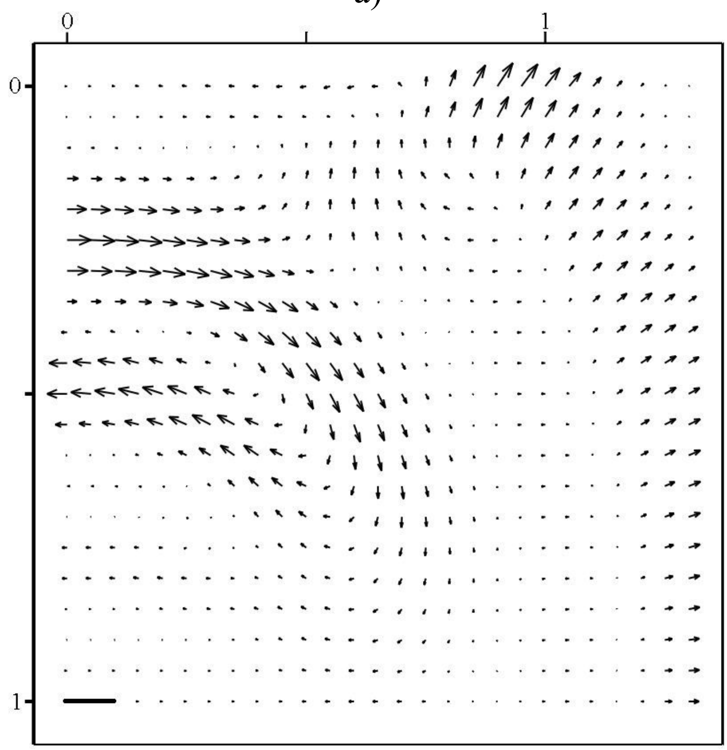
На рис.1.15. объемная волна добежала до дневной поверхности и отразилась, а сдвиговая волна еще не дошла, и можно заметить, что отраженная объемной волны имеет малую амплитуду. Так как отраженная волна имеет малую амплитуду по сравнению с неотраженными волнами, она сливается с неотражёнными волнами, и можно заметить, что в местах пересечения увеличение амплитуды соответствующих волн.

В момент времени t=1,725 сдвиговая волна сжатия – расширения пробегает расстояние до поверхности, что и видим на рис.1.16. Так как в эпицентре отраженная объемная волна имеет малую амплитуду, она никак не повлияла на поведение сдвиговой волны.

Взаимодействие объемных и сдвиговых волн с дневной поверхностью и между собой (после отражения) порождают разные волны, среди них *поверхностная волна Релея*. В данной среде она распространяется со скоростью c_p=0,918c_2=0,53, близкой к скорости распространения сдвиговой волны. На рис.1.17. – 1.19. на дневной поверхности хорошо видна эта поверхностная волна, с характерным для нее вихревым движением точек поверхности. На этих рисунках можно заметить, как отраженная сдвиговая волна догоняет отраженную объемную волну. Это означает, что отраженная объемная волна под действием сдвиговой волны потеряла скорость, т.е. изменила характер распространения, что и обуславливает появление релеевской волны.



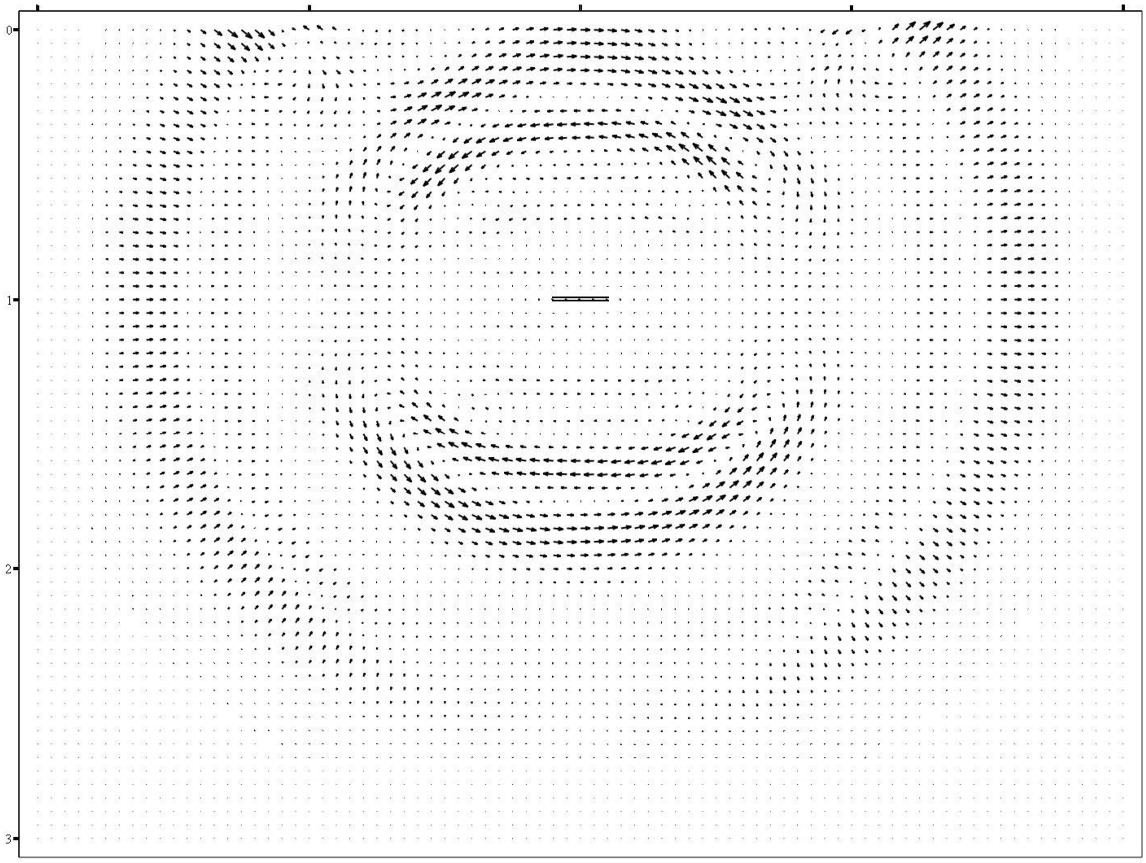
а)



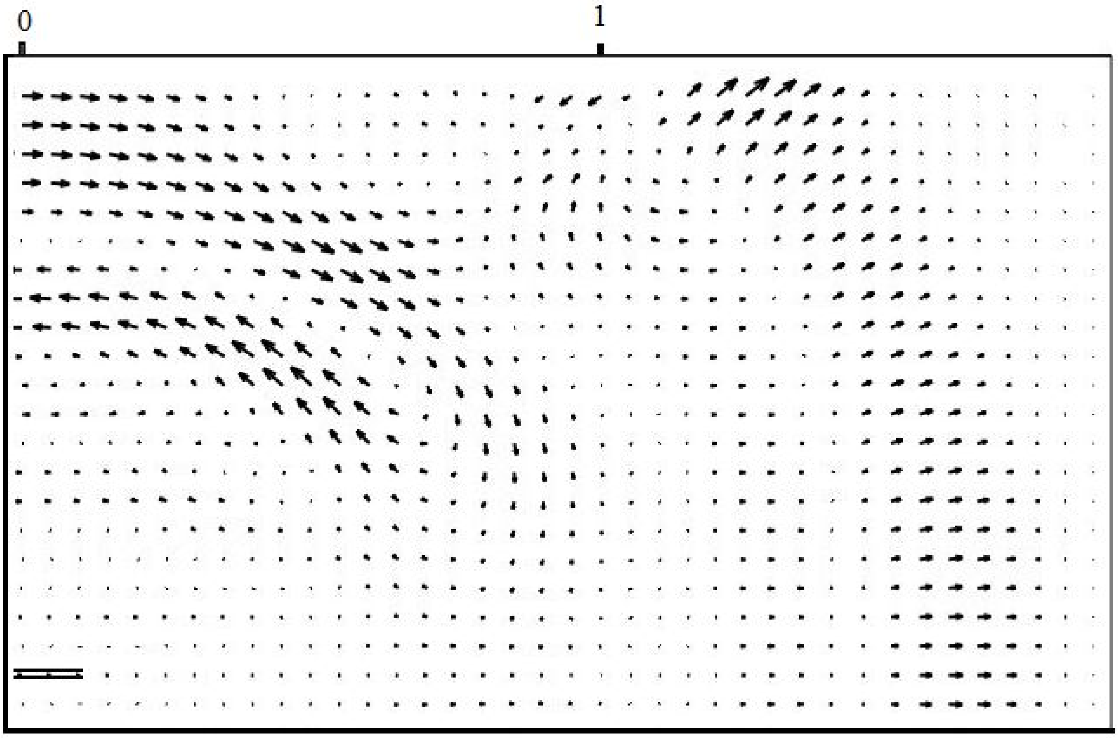
б)

Рис. 1.15. Векторное поле скоростей при t =1,5:

а) полная картина, б) часть картины.



а)



б)

Рис. 1.16. Векторное поле скоростей при t =1,725

а) полная картина, б) часть картины.

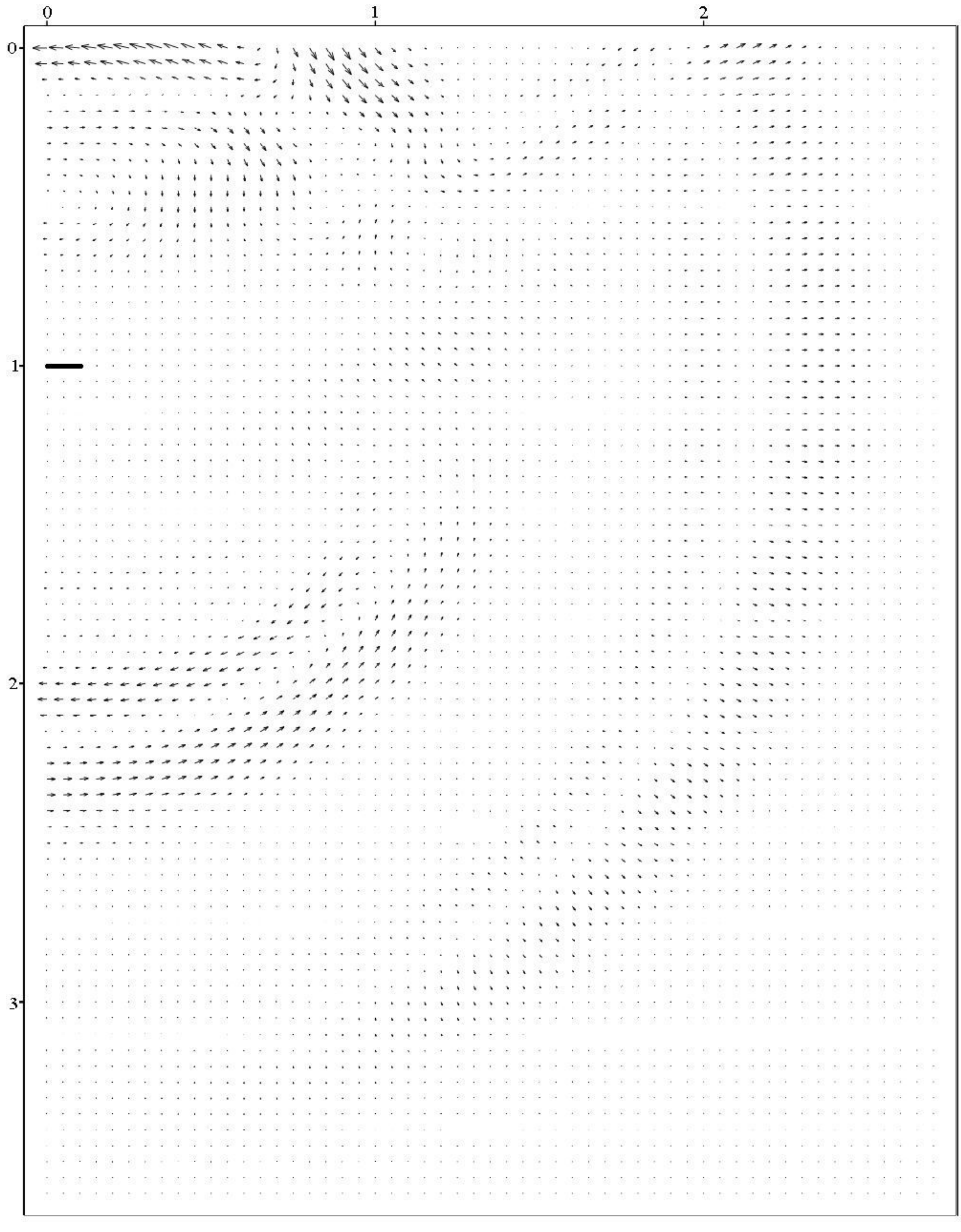


Рис. 1.17. Векторное поле скоростей при t =2,5.

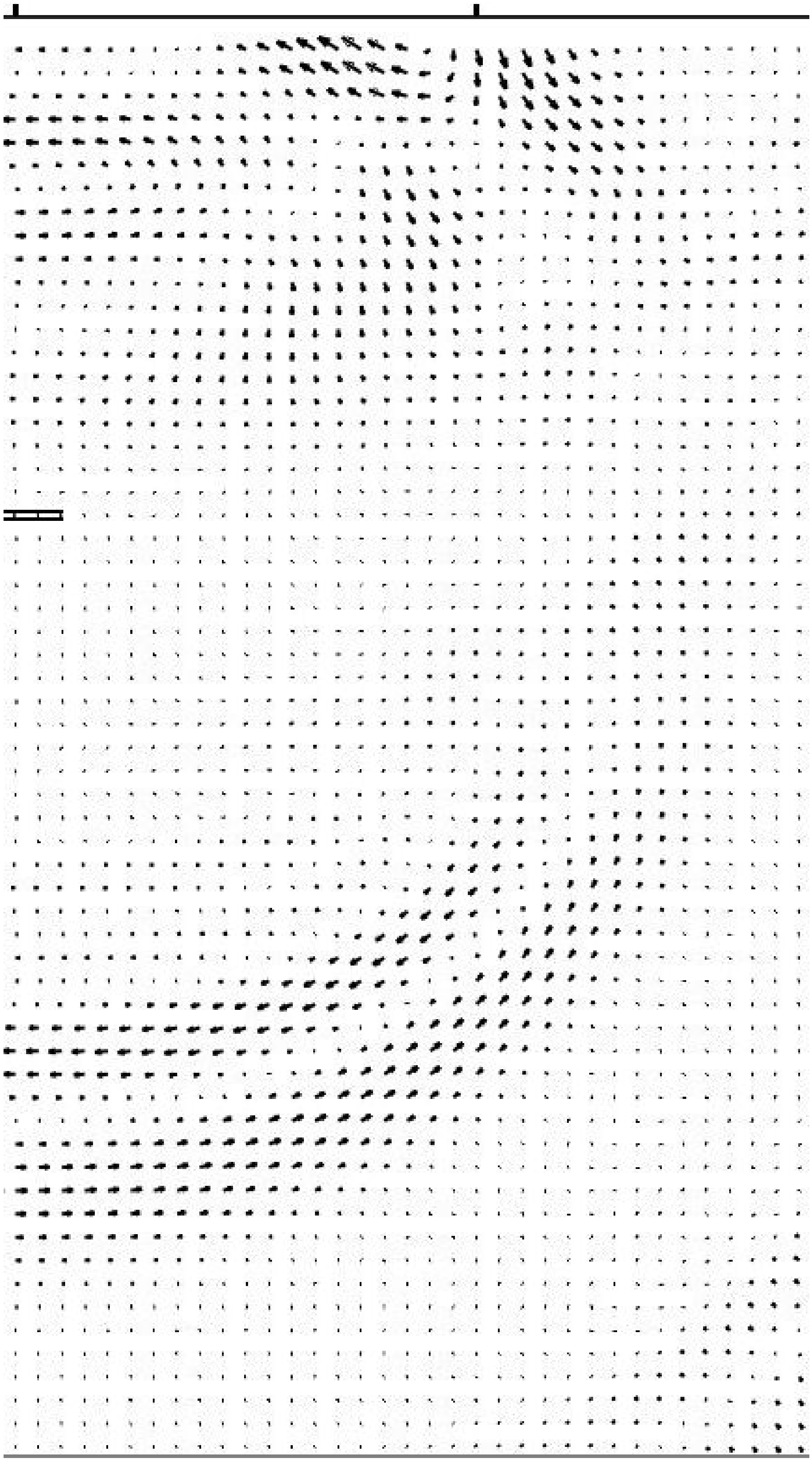


Рис. 1.18. Векторное поле скоростей при t =2,725.

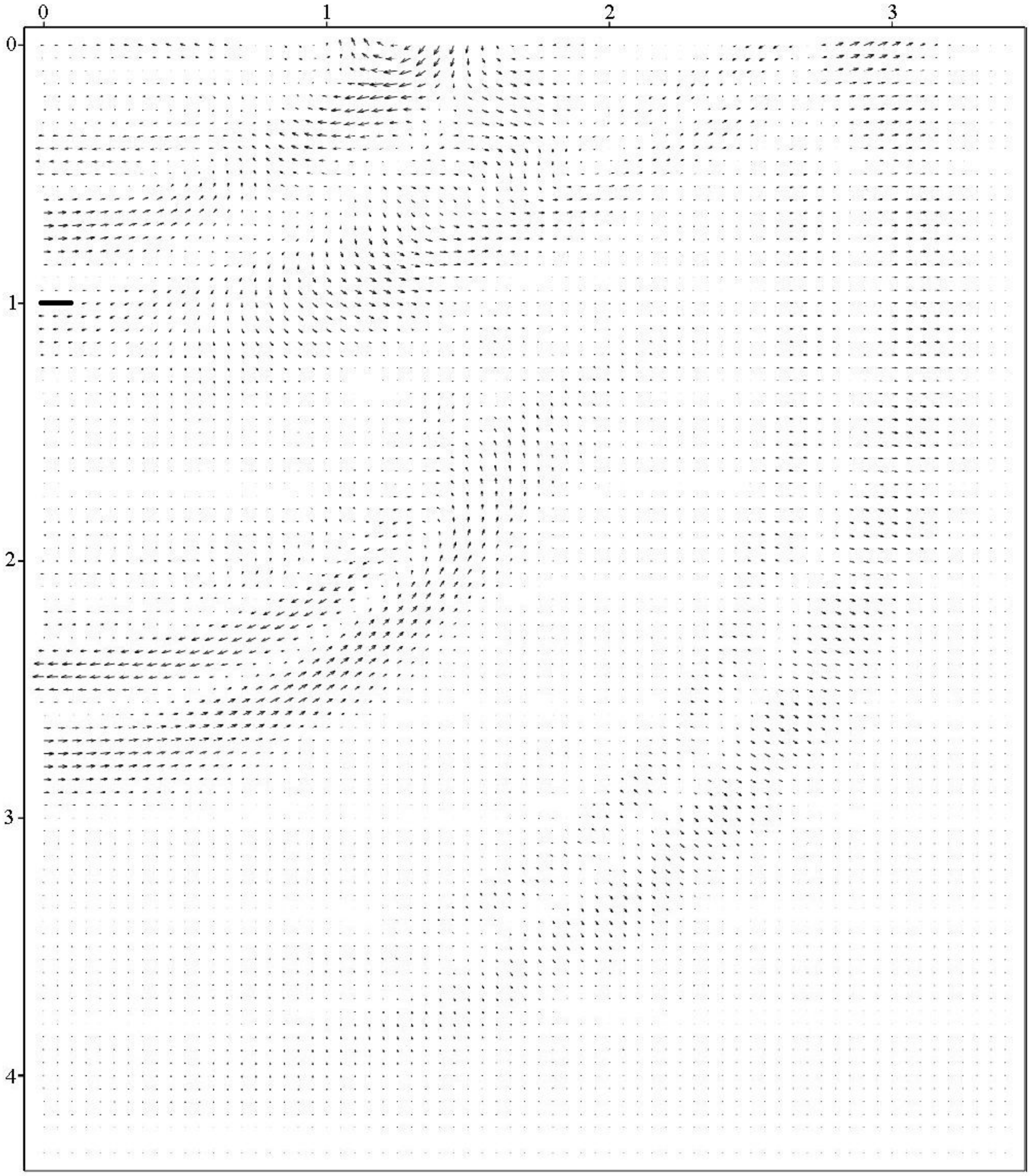
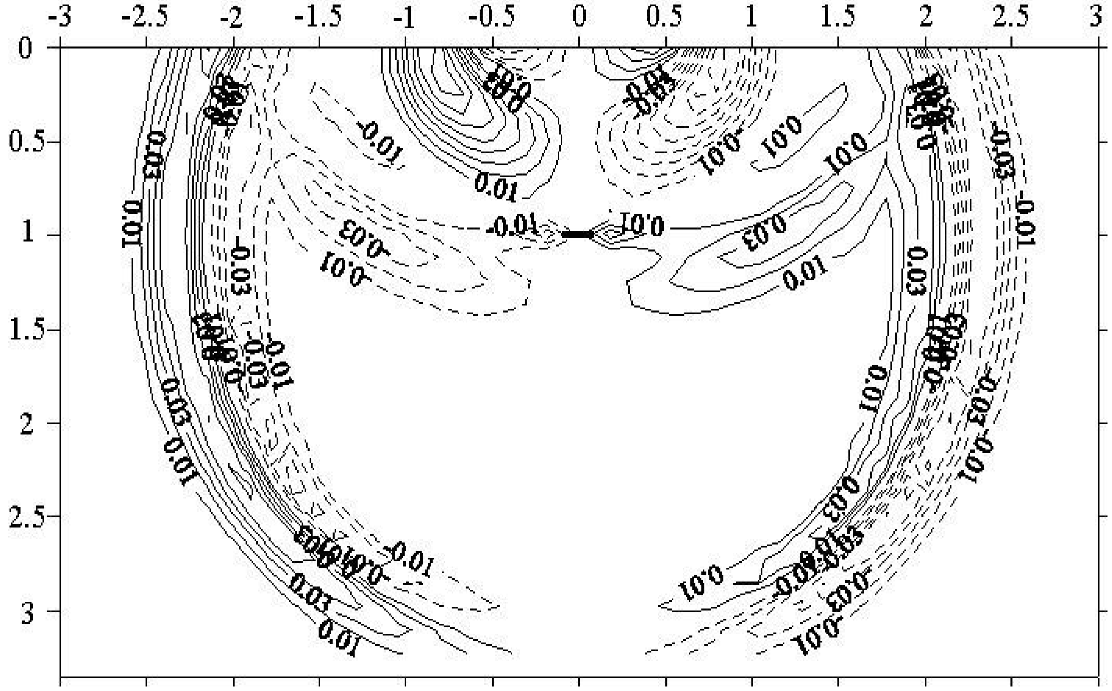


Рис. 1.19. Формирование поверхностной волны Релея: t = 3,25.

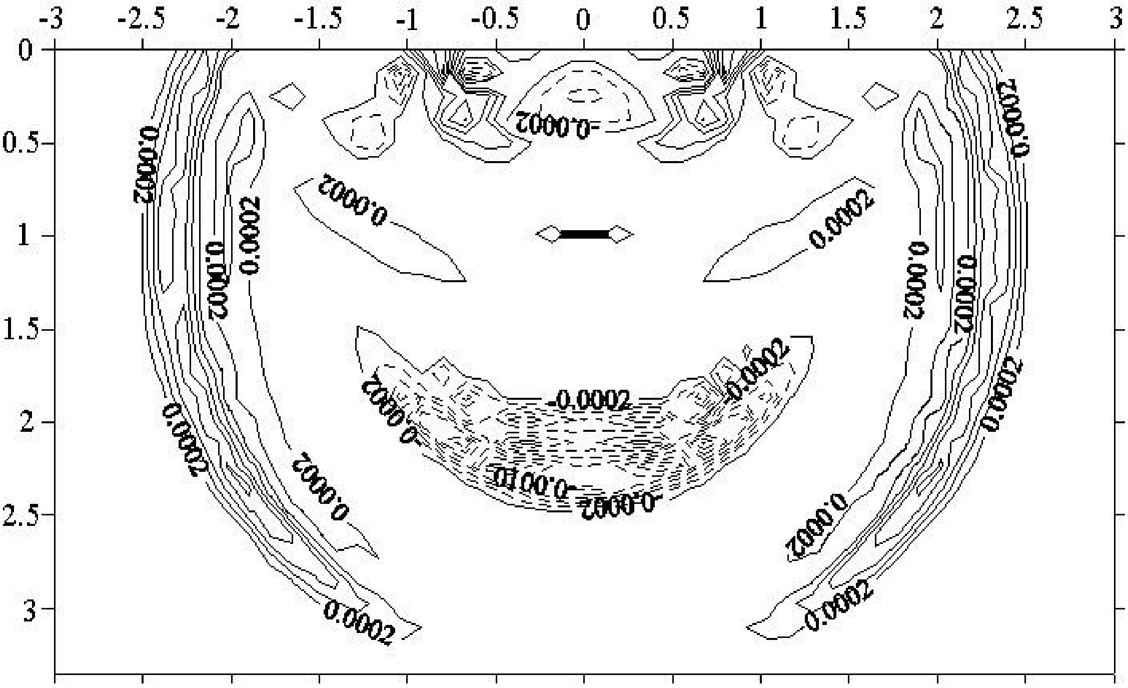
Порождаемое волнами напряженное состояние среды представлено на рис.1.20 и 1.21, где построены изолинии первого и второго инвариантов тензора напряжении:

$$I_1=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33} \text{ и } I_2=\sigma_{11}\,\sigma_{22}-\sigma_{12}\,\sigma_{12}+\sigma_{33}\,\sigma_{11}+\sigma_{33}\,\sigma_{22}\,,$$

где $\sigma_{33} = \dfrac{c_1^2 - 2c_2^2}{2(c_1^2 - c_2^2)}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, в моменты времени t = 2,5 и t = 3,25. Они характеризуют распределение давления и интенсивности касательных напряжений в окрестности очага землетрясения.

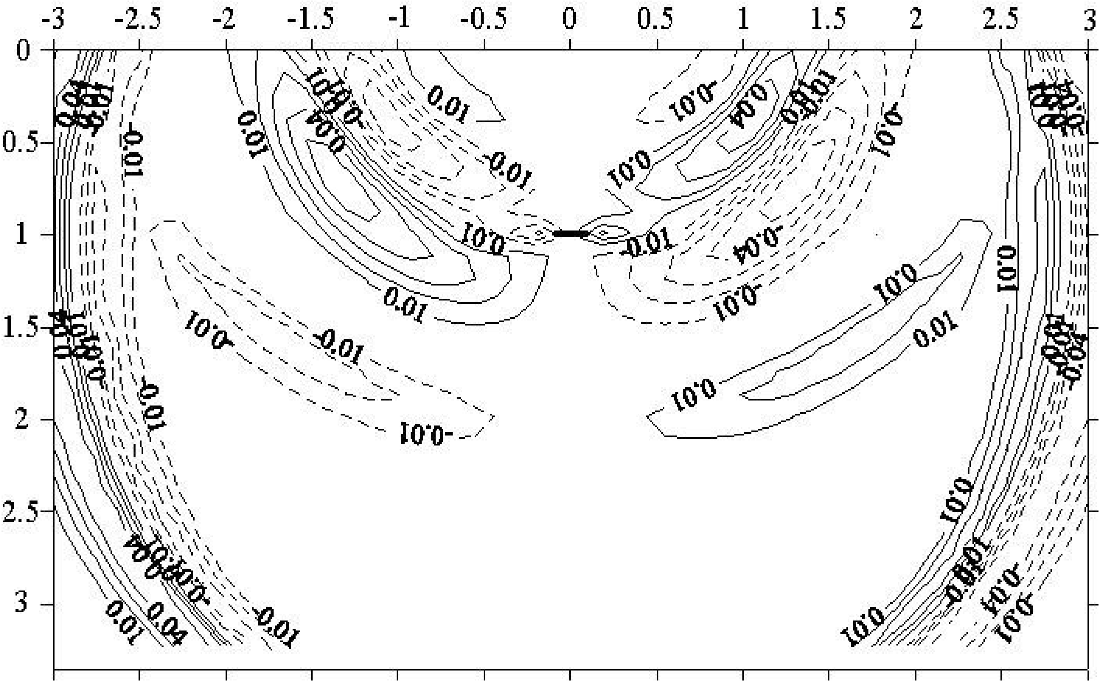


а)

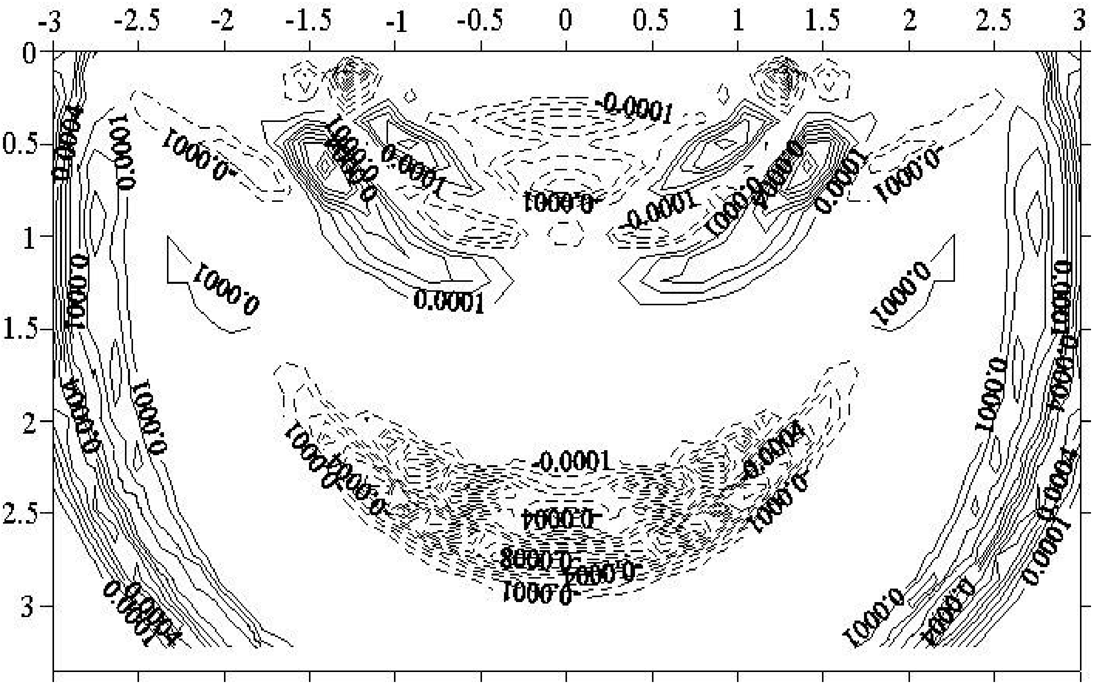


б)

Рис. 1.20. Изолинии а) первых и б) вторых инвариантов напряжения в момент t =2,5.



а)



б)

Рис. 1.21. Изолинии а) первых и б) вторых инвариантов напряжении в момент t =3,25.

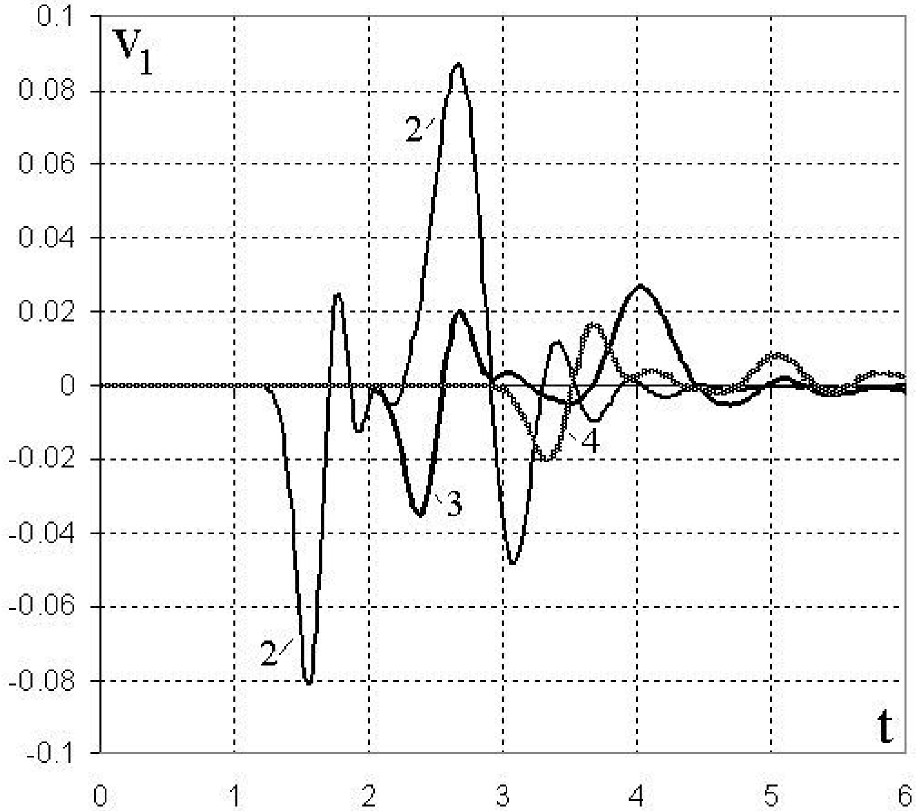
На рис. 1.22 - 1.26 представлены осциллограммы скоростей и напряжений в эпицентре и фиксированных точках поверхности и среды. Скорости распространения продольных и поперечных волн в безразмерных величинах составляют $c_1=1$ и $c_2=0,577$ соответственно. Отсюда следует, что объемные (продольные) и сдвиговые (поперечные) волны от трещины к точке $O(0, 0)$ придут за время $t_1=1$ и $t_2=1,73$ соответственно, а в точку A(0; 1) за $t_1=1,35$ и $t_2=2,33$, в точку B(0; 2) за $t_1=2,15$ и $t_2=3,71$. и в точку C(0; 3) за $t_1=3,07$ и $t_2=5,31$. В указанные моменты времени возникает всплеск амплитуды колебания.

Скорость $v_1=0$ в эпицентре O (и по всей прямой $x_2=0$) объясняется типом воздействия на трещине. Так как в перпендикулярном направлении к дневной поверхности движется сдвиговая волна можно заметить, что чем ближе точка к эпицентру, тем выше амплитуда колебании скоростей точки в момент прохода сдвиговой волны. Отрицательное направление скорости v_2 в точке O в промежуток времени (1; 1,7) объясняется взаимодействием фронтов распространяющихся волн (см. Рис. 1.14.)

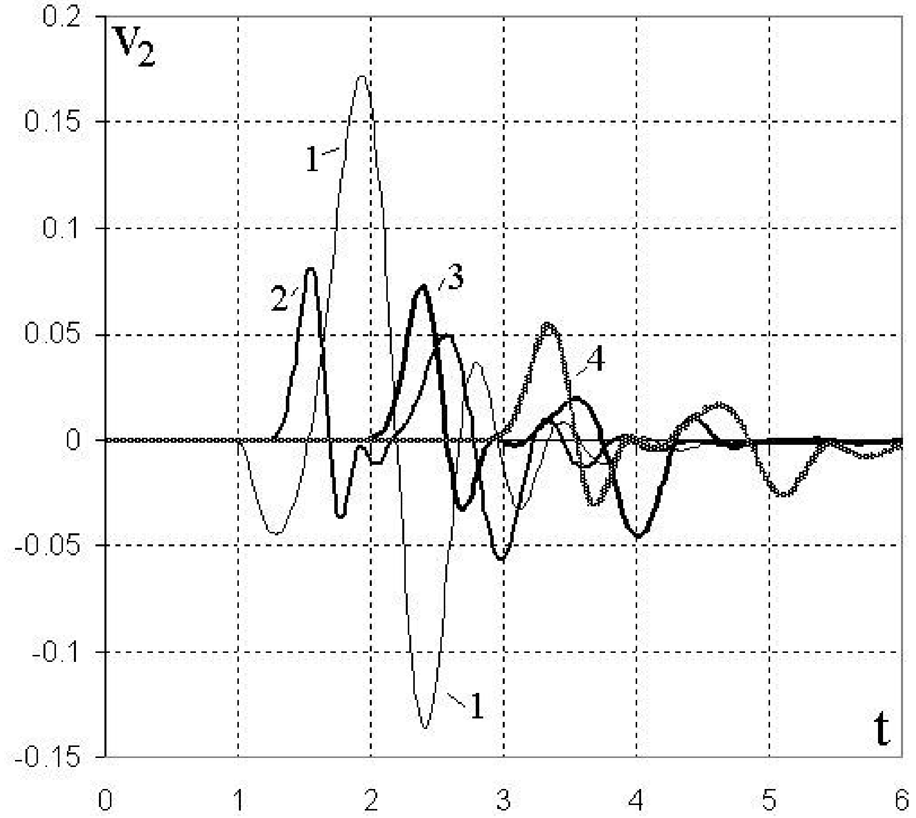
На рис. 1.24 показаны осциллограммы скоростей v_1, v_2 и напряжении σ_{12} на глубине $x_1=0,5$ в точках $x_2=0$; $x_2=1$; $x_2=2$; $x_2=3$. Сравнивая их с осциллограммами на дневной поверхности можно заметить схожесть графиков. На дневной поверхности амплитуда колебаний больше, чем на глубине. Максимальные значения скорости v_1 наблюдаются в точках 2) $x_2=1$ и 3) $x_2=2$ в момент прихода пика отраженной объемной волны, усиленные поверхностными сдвиговыми волнами. А максимальные значения скорости v_2 и напряжения σ_{12} наблюдаются в точке 1) $x_2=0$ в момент прихода пика сдвиговой волны.

На рис. 1.25 – 1.26 показаны срезы скорости v_2 и напряжений σ_{12} на плоскости $x_2 = 0$ (в силу симметричности воздействия в данной плоскости v_1, напряжений σ_{11} и σ_{22} равны нулю) при $t = 1$, $t = 1,75$ и $t = 2,5$. При $t = 1$ волна с малой амплитудой (объемная волна, распространяющаяся с концов трещины) добегает до дневной поверхности, нет отраженной волны –

соблюдается полная симметричность относительно трещины. А напряжений σ_{12} антисимметричны

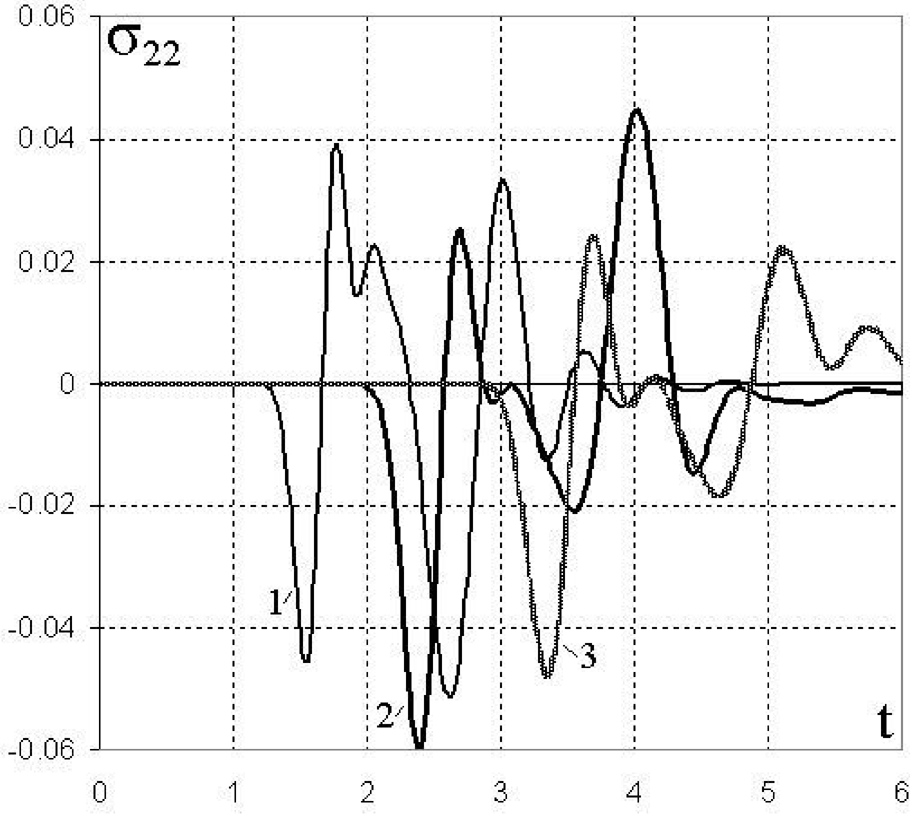


а)

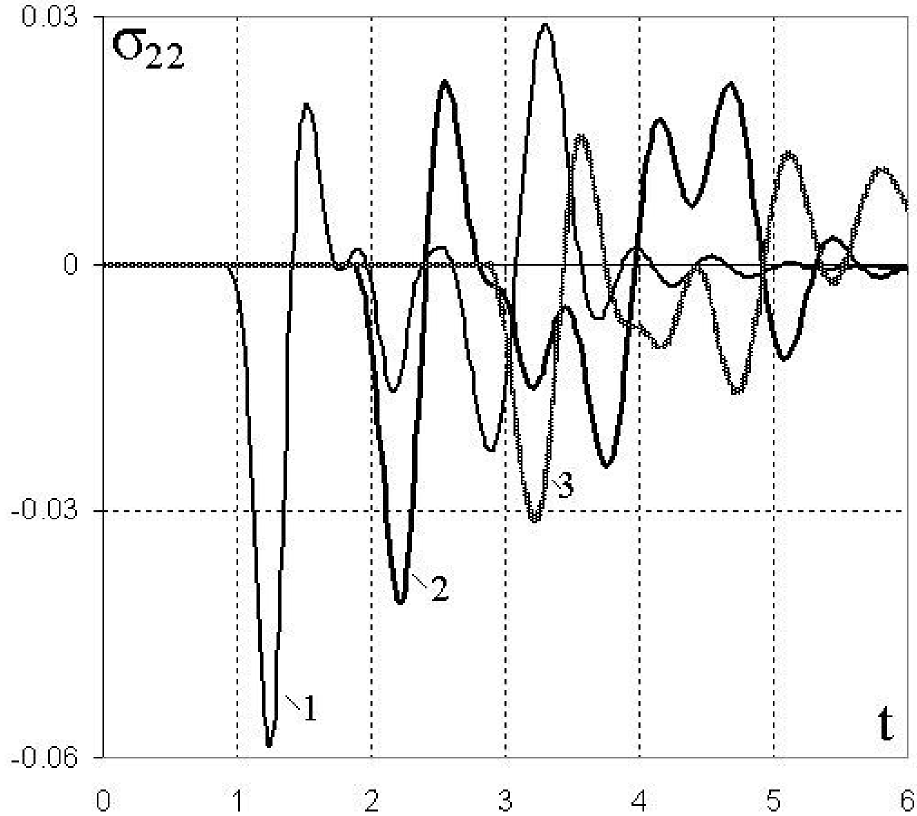


б)

Рис. 1.22. Осциллограммы а) скоростей v_1 и б) скоростей v_2 на дневной поверхности $x_1=0$ при 1) $x_2=0$; 2) $x_2=1$; 3) $x_2=2$; 4) $x_2=3$.

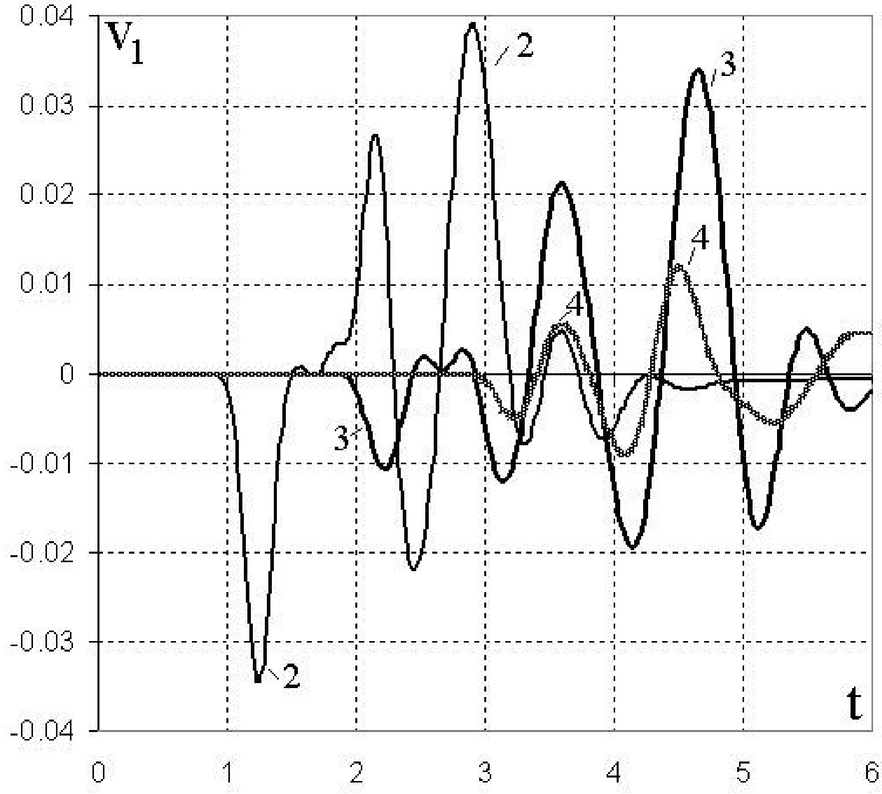


а)

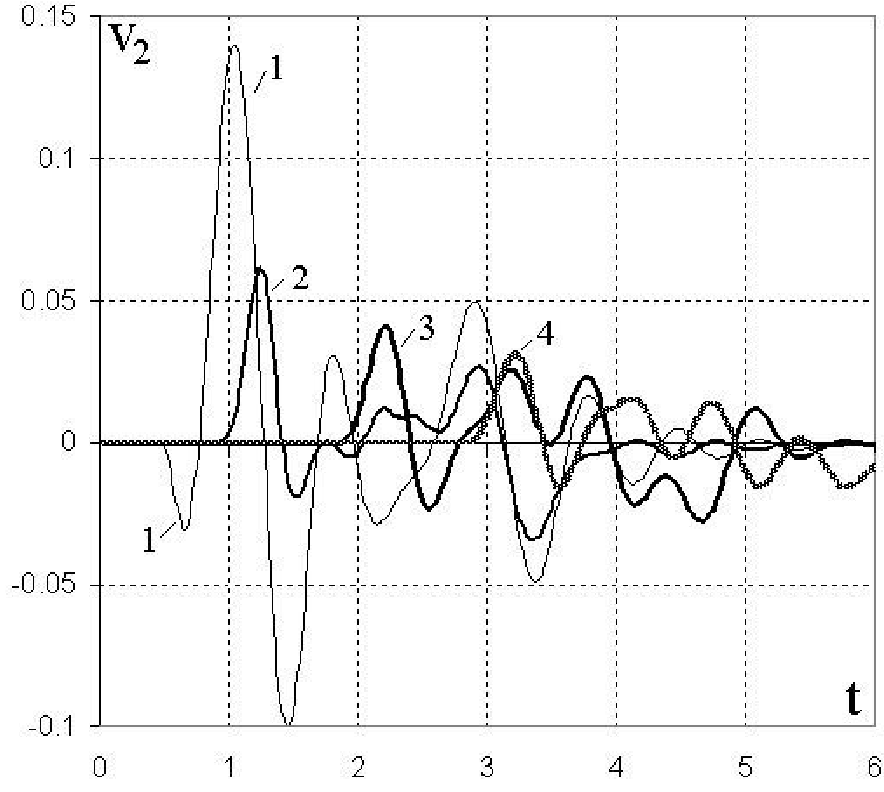


б)

Рис. 1.23. Осциллограммы напряжении σ_{22} при 1) $x_2=1$; 2) $x_2=2$; 3) $x_2=3$ а) на дневной поверхности $x_1=0$ и б)на глубине $x_1=0,5$.



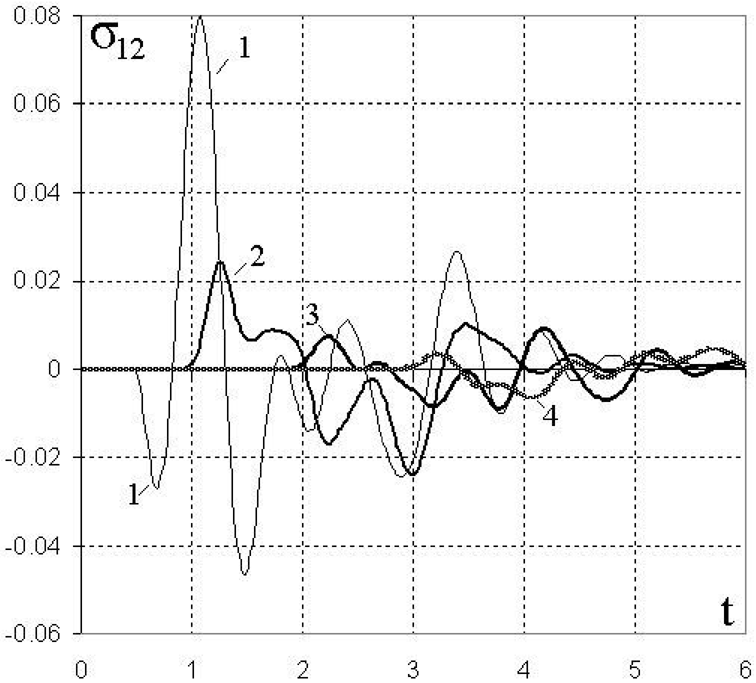
а)



б)

Рис. 1.24. Осциллограммы а) скоростей v_1, б) скоростей v_2

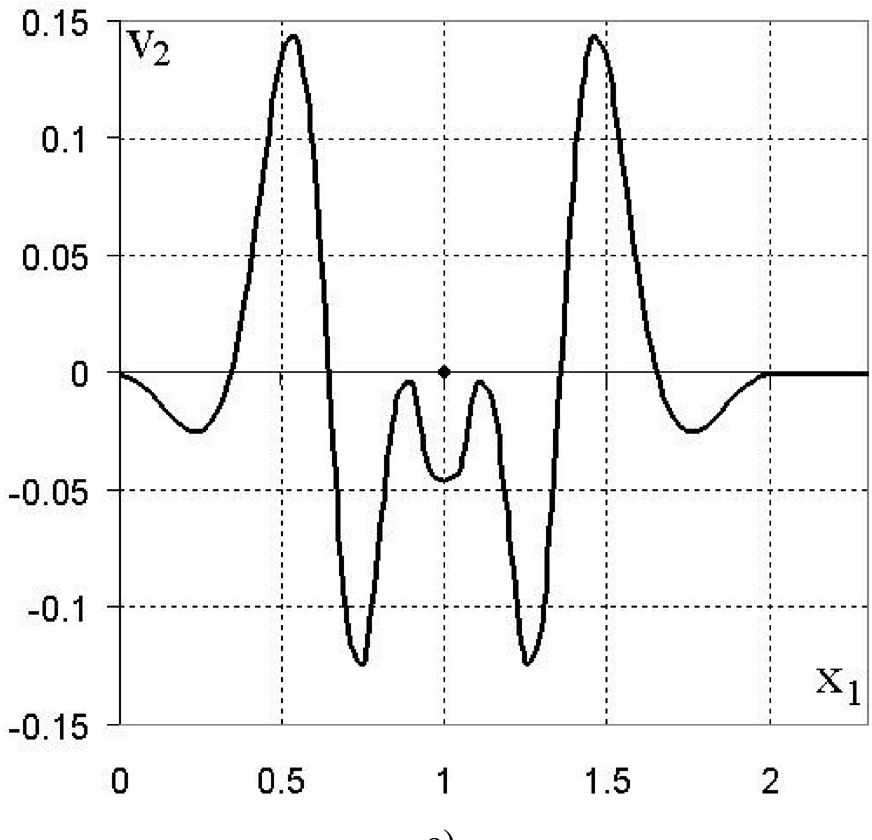
в) напряжения σ_{12} на глубине x_1=0,5 при 1) x_2=0; 2) x_2=1; 3) x_2=2; 4) x_2=3.



в)

Рис. 1.24. Осциллограммы а) скоростей v_1, б) скоростей v_2

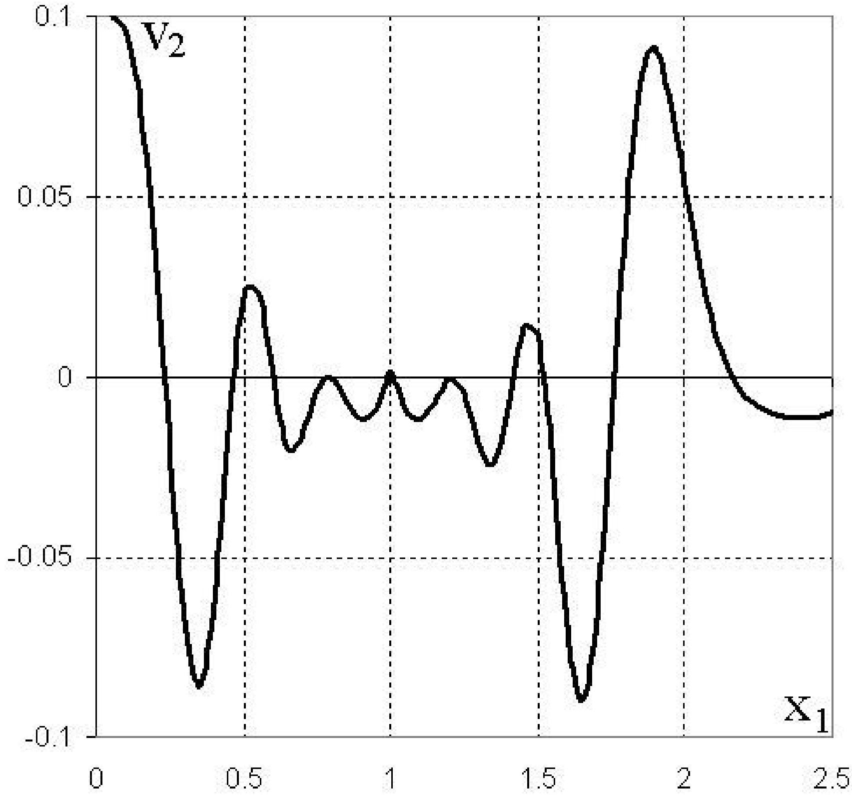
в) напряжения σ_{12} на глубине x_1=0,5 при 1) x_2=0; 2) x_2=1; 3) x_2=2; 4) x_2=3.



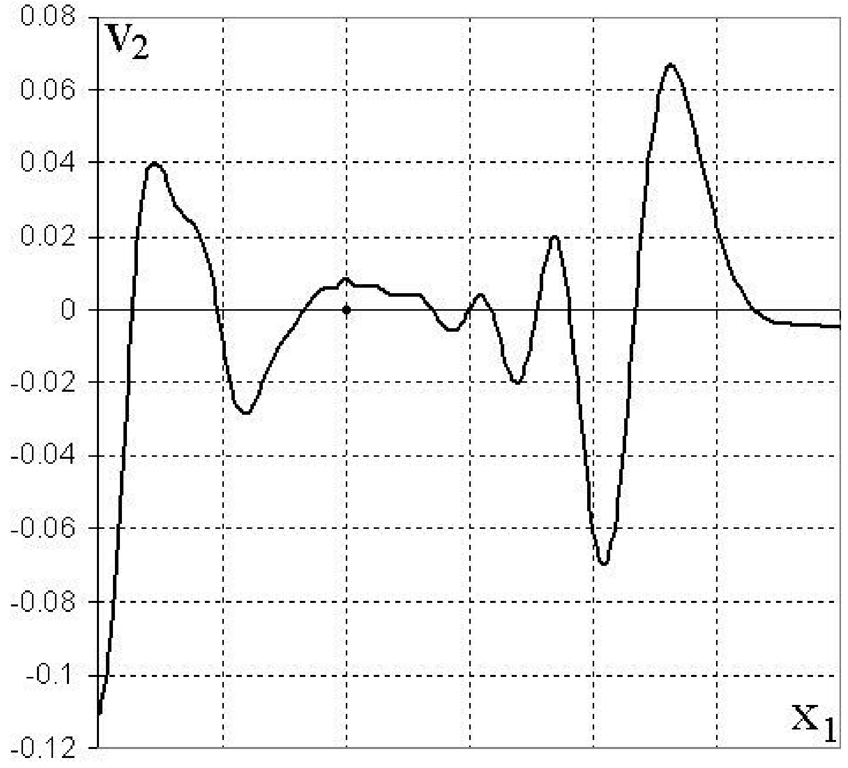
а)

Рис. 1.25. Срез скоростей v_2 на плоскости $x_2 = 0$:

а) $t = 1$, б) $t = 1{,}75$, в) $t = 2{,}5$.



б)



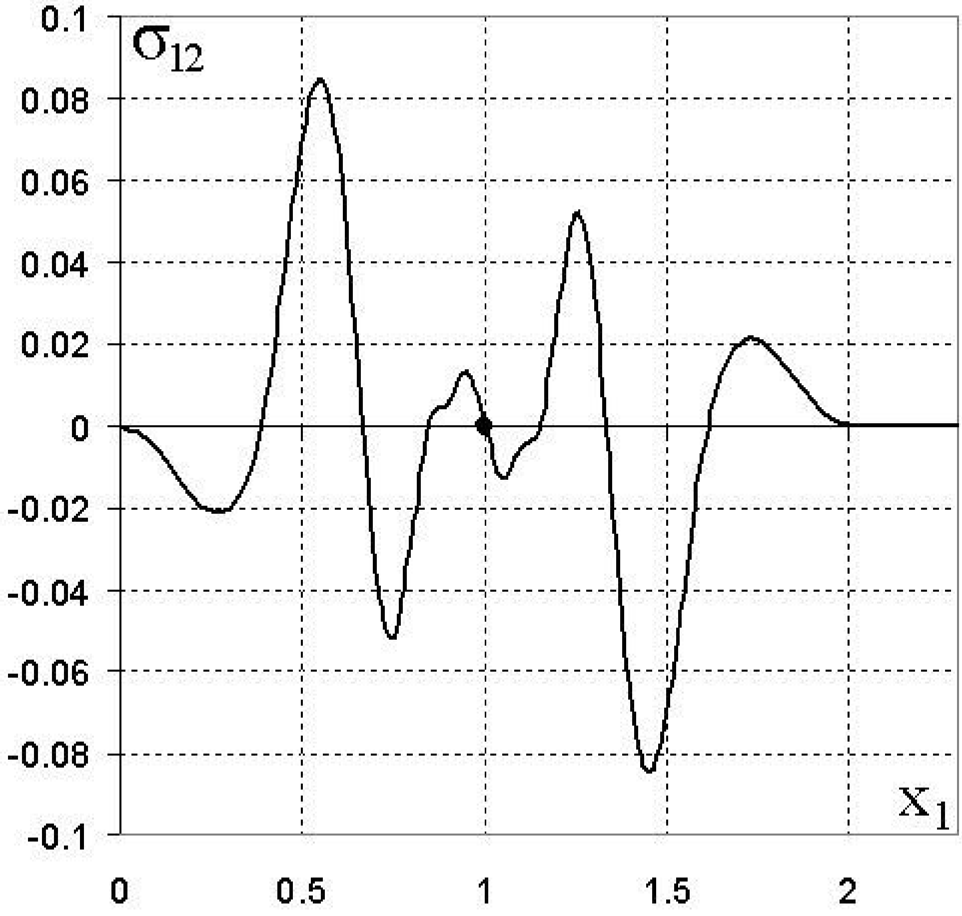
в)

Рис. 1.25. Срез скоростей v_2 на плоскости $x_2 = 0$:

а) t = 1, б) t = 1,75, в) t = 2,5.

В момент времени *t = 1,75* объемная волна уже отразилась, а сдвиговая только прибежала к дневной поверхности. Так как объемная в близи точки (0; 0) имеет небольшую амплитуду, она поглощается прибежавшей сдвиговой волной, при этом наблюдается увеличение амплитуды скорости v_2. На рисунках 1.23б) и 1.24б) симметричность волны соблюдается, если не учесть увеличения амплитуды со стороны дневной поверхности (на отрезке [0; 0,75]).

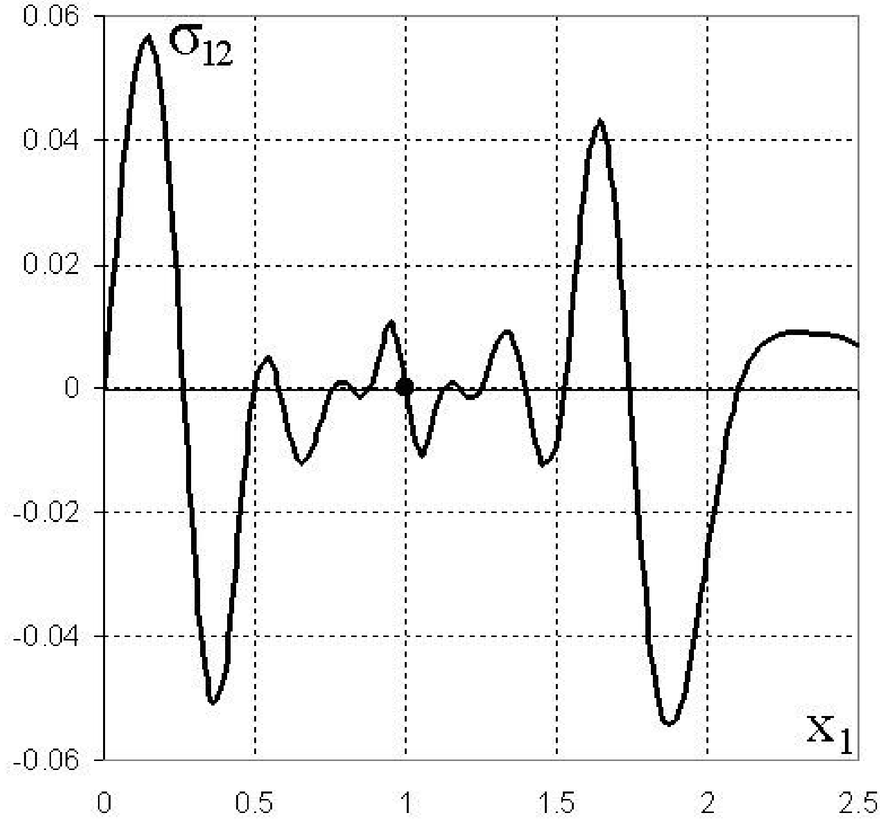
Сравнивая амплитуды колебания, можно заметить, что с течением времени амплитуда убывает, это связано с тем, что в эти моменты нет внешнего воздействия, а среда противодействует, заставляя волну гаснуть (волна теряет энергию).



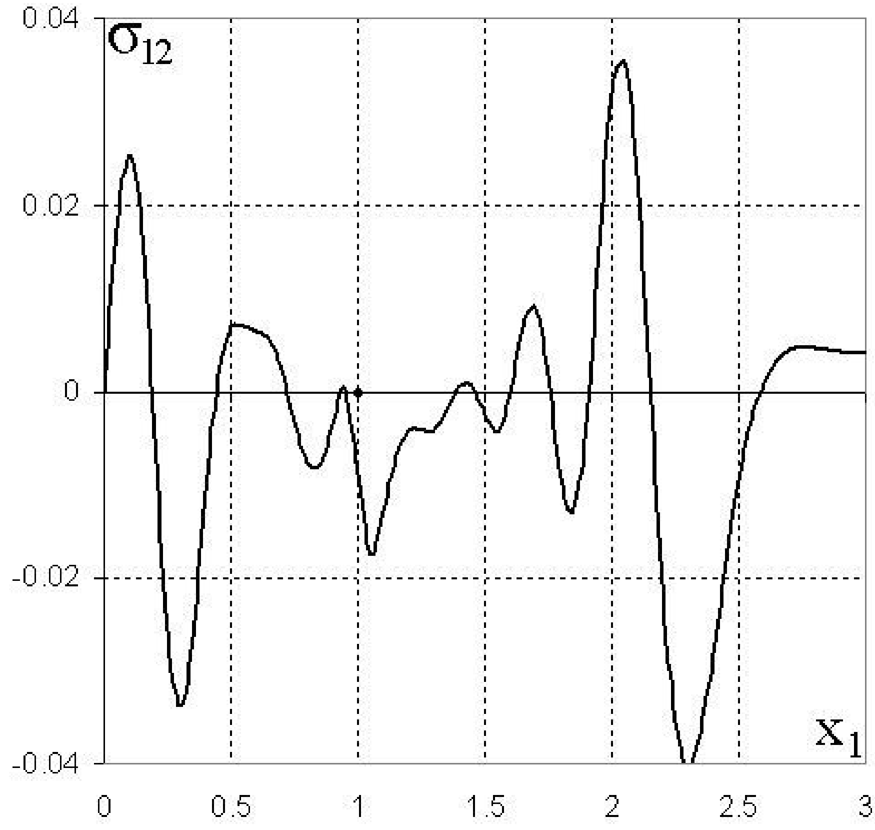
а)

Рис. 1.26. Срез напряжений σ_{12} на плоскости $x_2 = 0$:

а) t = 1, б) t = 1,75, в) t = 2,5.



б)



в)

Рис. 1.26. Срез напряжений σ_{12} на плоскости $x_2 = 0$:
а) t = 1, б) t = 1,75, в) t = 2,5.

Переход к размерным величинам. Так как расчеты были произведены с безразмерными параметрами: $\rho = 1, c_1 = \sqrt{\gamma_{11}} = 1, c_2 = \sqrt{\gamma_{12}} = 0.577$, то задав любую реальную плотность, глубину трещины и такие скорости, чтобы отношения $c_2/c_1 = 0.577$ (параметр $\frac{c_2}{c_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$, т.е. $\mu = \lambda$ в сейсмологии используются для грунтов [2]) можно сделать переход к размерным величинам по следующим формулам:

$$t = \frac{\bar{t}\,L}{c_1};\quad x_i = \bar{x}_i L;\quad v_i = \bar{v}_i c_1;\quad \sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}\rho c_1^2;\quad F_i = \frac{\bar{F}_i \rho c_1^2}{L}$$

где черта указывает на безразмерные величины. Обычно в сейсмологии для грунтов используют параметры:

$$\rho = 1600\ кг/м^3,\quad c_2 = 2000\ м/с,\quad c_1 = \sqrt{3}\,c_2 = 3464\ м/с.$$

Учитывая последние параметры, если взять глубину трещины $L = 100м$, то расчетный интервал времени *(0; 6)* окажется в реальности *(0; 0,17с)*, длина трещины $2d = 20м$, в точке *O(0; 0)* максимальная по абсолютной величине скорость $v_2 = 0{,}18 * 3464 м/с = 622.8 м/с$, а напряжение

$$\sigma_{22} = 0{,}04 * 1600 кг/м^3 * (3464 м/с)^2 = 766 МН/м^2.$$

Если взять $L = 100км$, то наш расчетный интервал времени *(0; 6)* окажется в реальности *(0; 2,88мин)*, длина трещины $2d = 20км$. А в точке *O(0; 0)* максимальная по абсолютной величине скорость v_2 и напряжение σ_{22} не изменятся ($v_2 = 622{,}8\ м/с$, $\sigma_{22} = 766 МН/м^2$).

ГЛАВА 2
МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ НАЗЕМНОГО СООРУЖЕНИЯ ПРИ ДИФРАКЦИИ И ПРЕЛОМЛЕНИИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

Одним из наиболее сложных вопросов расчета строительных сооружений является учет взаимодействия сооружения с грунтом. Теоретическое исследование этой задачи опирается на математическое моделирование реальных физико-механических свойств системы «сооружение-грунт» и их контактного взаимодействия. При этом большое влияние на прочностные свойства сооружения оказывают условия контактного взаимодействия сооружения с грунтом (жесткий, вязкий, скользкий и др.), характер динамического воздействия со стороны грунта на наземное сооружение, который зависит от типа сейсмических волн, распространяющихся в породном массиве. При землетрясениях определяющим для сейсмостойкости наземных сооружений является его расстояние от эпицентра. Для учета всех этих факторов здесь разработана модель динамики прямоугольного упругого тела на упругом основании при дифракции и преломлении упругих волн, порождаемых сбросом напряжений на трещине в упругом полупространстве.

В настоящей главе дана постановка начально-краевой контактной задачи при жестком сцеплении тела и породного массива, приведены определяющие уравнения движения, дан выбор точечной расчетной схемы и шаблона для изотропной полосы, частично помещенной в упругую полуплоскость. Принята явная разностная схема, построенная на основе метода бихарактеристик с привлечением идеи расщепления по пространственным координатам. Получены разрешающие разностные уравнения для внутренних, граничных, угловых, особых и контактных точек сопряжения полосы и полуплоскости. Решена модельная задача для исследования напряженно - деформированного состояния поверхностных сооружении, обусловленного сбросом тектонических напряжений на глубинных трещинах в земной коре при землетрясениях.

2.1. Постановка контактной задачи дифракции волн в упругой полуплоскости с упругим телом на границе

Рассмотрим полупространство $x_1 \leq 0$ упругой однородной изотропной среды (первая среда D_1) с плотностью ρ_1 и упругими коэффициентами Ламе λ_1 и μ_1, а также поверхностное включение (вторая среда D_2 – упругое изотропное тело с высотой d_1 и шириной $2d_2$) с плотностью ρ_2 и упругими коэффициентами Ламе λ_2, μ_2 в условиях плоской деформации при сбросе напряжений на горизонтальной трещине S, которая расположена на глубине L (x_1=L, $|x_2| \leq d$). (рис. 2.1.)

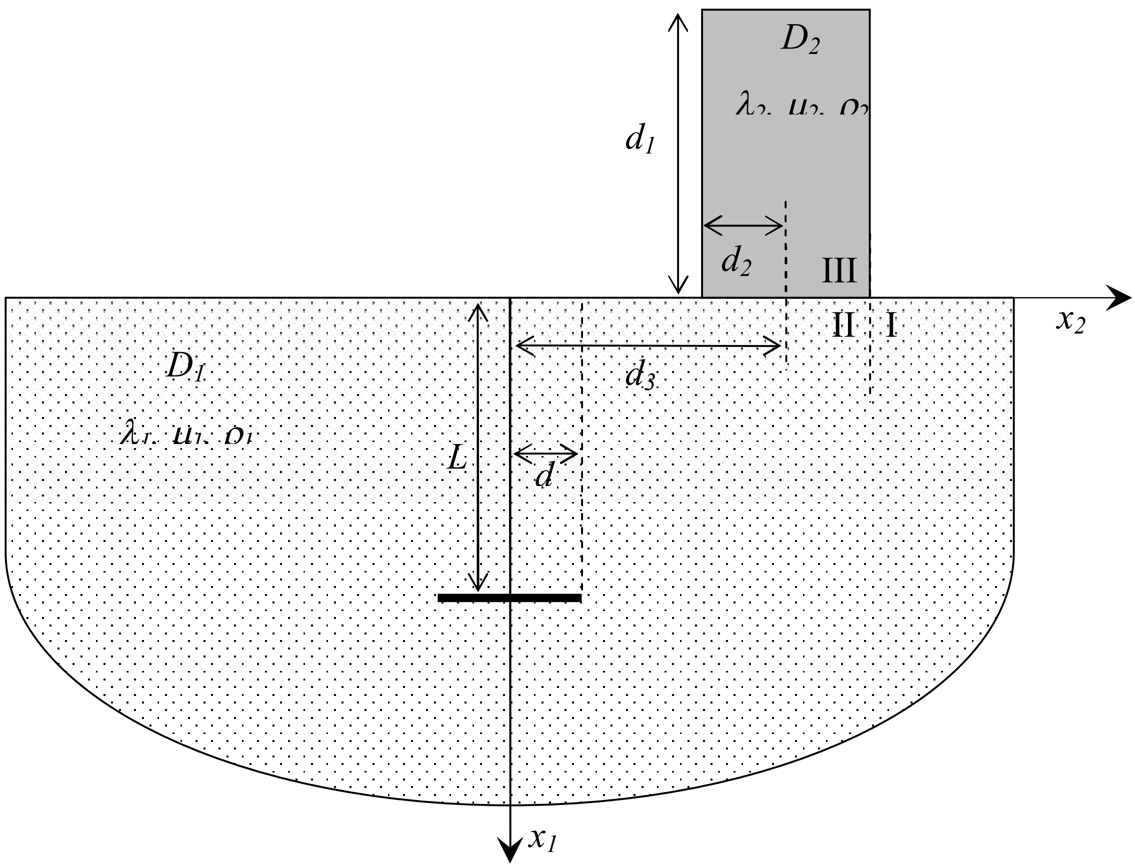


Рис. 2.1. Упругое полупространство с упругим телом на границе (расчетная схема).

В начальный момент времени k-ая среда находятся в состоянии покоя

$$\mathbf{u}^{(k)} = 0, \ \dot{\mathbf{u}}^{(k)} = 0 \ \ (k = 1,2), \tag{2.1}$$

при свободных от воздействующих нагрузок на границе полупространства и включения:

$$\sigma^{(1)}_{1j}=0 \ \ (j=1,2), \ \text{при} \ x_1 = 0, \ |x_2 - d_3| > d_2, \tag{2.2}$$

$$\sigma^{(2)}_{1j}=0 \ \ (j=1,2), \ \text{при} \ x_1 = -d_1, \ |x_2 - d_3| \leq d_2, \tag{2.3}$$

$$\sigma^{(2)}{}_{2j}=0 \ \ (j=1,2), \ \text{при} \ \ |x_2 - d_3| = d_2, \ \ -d_1 \le x_1 \le 0 \tag{2.4}$$

(верхний индекс, в скобках, указывает номер среды). А условия на контактной границе отвечают требованиям полного сцепления (жесткий контакт):

$$v^{(1)}{}_i = v^{(2)}{}_i, \quad \sigma^{(1)}{}_{1j} = \sigma^{(2)}{}_{1j} \ \ (i,j=1,2)\,, \ \text{при} \ \ x_1 = 0, \ |x_2 - d_3| \le \ d_2. \tag{2.5}$$

Так как на бесконечности отсутствуют источники колебания, то очевидным является требование, чтобы на бесконечности выполнялись условия затухания:

$$u_j \to 0, \ \sigma_{ij} \to 0 \ \text{ при } \ \|x\| \to \infty.$$

При описанных условиях необходимо исследовать напряженно – деформированное состояние неоднородной среды D_1 U D_2 при $t > 0$

Для решения поставленной задачи наряду с начальными (2.1) и граничными условиями (2.2) – (2.5) используется система уравнений, состоящая из уравнений движения и соотношений обобщенного закона Гука:

$$\sigma^{(k)}_{i\beta,\beta} + F^{(k)}_i \quad \rho_k \frac{\partial^2 u^{(k)}_i}{\partial t^2} = (i,k \quad 1,2)\,, \qquad = \tag{2.6}$$

$$\sigma^{(k)}_{ij} = \lambda_k u^{(k)}_{\beta,\beta}\delta_{ij} + \mu_k(u^{(k)}_{i,j} + u^{(k)}_{j,i}) \qquad (i,j,k = 1,2) \tag{2.7}$$

где $u^{(k)}{}_i$ – вектор перемещений, $\sigma^{(k)}{}_{ij}$ – тензор напряжений, $F^{(k)}{}_i$ - компоненты объемной силы, δ_{ij} - символ Кронекера.

Компоненты $F^{(1)}_i$ объемной силы $\boldsymbol{F}^{(1)}$ определяются сингулярной обобщенной функцией – простым слоем на трещине S [44], здесь они имеют следующий вид:

$$F^{(1)}_i = n_\beta \left[\sigma^{(1)}_{i\beta}\right]_S \delta_S(x) \quad n_\beta \left[\sigma^{(1)}_{i\beta}\right]_S \delta(x_1 - L) H(d - |x_2|), \quad i = 1,2 \tag{2.8}$$

где выражение в квадратных скобках – скачок компонент тензора напряжений на берегах трещины, $\boldsymbol{n}$ – единичная нормаль к ее поверхности, в данном случае $\mathbf{n} = (n_1, n_2) = (1; 0)$, $H(x_1)$ – функция Хевисайда, $\delta(x_1)$ –

$\delta-$функция Дирака. Предполагается, что скачок напряжений на трещине известен:

$$n_\beta \left[\sigma_{i\beta}^{(1)}(x) \right]_S = P_i(x,t), \quad x \in S, t > 0. \tag{2.9}$$

Здесь в расчетах импульсный сброс напряжений в виде

$$P_i(x,t) = Pt\,\mathrm{e}^{-at}\,H(t), \quad (a > 0), \tag{2.10}$$

А для представления $\delta-$функция Дирака используются дельтообразные последовательности $\delta_\varepsilon(x)$ [45]:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x) = \delta(x), \quad \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} (2\varepsilon)^{-1}, & x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ 0, & x \notin [-\varepsilon, \varepsilon] \end{cases},$$

где $\varepsilon > 0$. Т.е. в расчетах

$$F_i = F_i^\varepsilon = n_\beta \left[\sigma_{i\beta} \right]_S \delta_\varepsilon(x_1 - L) H(d - |x_2|), \quad i, \beta = 1,\ 2$$

2.2. Решение контактной задачи методом бихарактеристик

2.2.1. Определяющие уравнения

Решение задачи удобно отыскивать в безразмерном пространстве переменных и искомых параметров, которые получаются после введения обозначений [37]

$$c_1^{(k)} = \frac{c_1^{(k)*}}{c_1^{(m)*}}; \quad c_2^{(k)} = \frac{c_2^{(k)*}}{c_1^{(m)*}}; \quad x_i = \frac{x_i^*}{L^*}; \quad t = \frac{t^* c_1^{(m)*}}{L^*};$$

$$\rho_k = \frac{\rho_k^*}{\rho_m^*}; \quad v_i^{(k)} = \frac{\dot{u}_i^{(k)*}}{c_1^{(m)*}}; \quad \sigma_{ij}^{(k)} = \frac{\sigma_{ij}^{(k)*}}{\rho_m^* \left(c_1^{(m)*} \right)^2}; \quad F_i^{(k)} = \frac{F_i^{(k)*} L^*}{\rho_m^* \left(c_1^{(m)*} \right)^2};$$

$$\gamma_{11}^{(k)} = \gamma_{22}^{(k)} = \rho_k \left(c_1^{(k)} \right)^2; \quad \gamma_{12}^{(k)} = \gamma_{21}^{(k)} = \rho_k \left(c_2^{(k)} \right)^2; \quad \gamma_{33}^{(k)} = \gamma_{11}^{(k)} - 2\gamma_{12}^{(k)}.$$

Здесь индекс * придается размерным величинам; индекс m относится к материалу, в котором скорость продольных волн является наибольшей; L^* –

характерный линейный размер; $c_1^{(k)*} = \sqrt{\dfrac{\lambda_k^* + 2\mu_k^*}{\rho_k^*}}, c_2^{(k)*} = \sqrt{\dfrac{\mu_k^*}{\rho_k^*}}$ – скорости распространения продольных и поперечных волн в k-той среде; t – время.

После введения безразмерных величин, из уравнений (2.6), (2.7) после простых преобразований можно получить *(i, j, к = 1, 2)*:

$$
\begin{aligned}
&\rho_k \dot{v}_i^{(k)} = \sigma_{i\beta,\beta}^{(k)} + F_i^{(k)}, \\
&\dot{\sigma}_{ij}^{(k)} = \gamma_{ij}^{(k)}(v_{i,j}^{(k)} + v_{j,i}^{(k)})\frac{1}{(1+\delta_{ij})} + \gamma_{33}^{(k)}(v_{\beta,\beta}^{(k)} - v_{i,j}^{(k)})\delta_{ij}.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Уравнения (2.11) представляют собой линейную неоднородную гиперболическую систему дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Её характеристические поверхности в трехмерном пространстве *(x_1; x_2; t)* представляют собой гиперконусы осями, параллельными оси времени. Система уравнений (2.11) имеет два семейства характеристических конусов. Эти конусы совпадают с бихарактеристиками уравнений (2.11). Вдоль характеристик, лежащих в плоскости x_α=*const*, уравнения (2.11) являются функциями только двух переменных *(x_j; t) ($j \neq \alpha$)*. Это обстоятельство указывает на то, что условия на бихарактеристиках могут быть получены как условия на характеристиках в соответствующей одномерной задаче. Соответствующие преобразования можно выполнить, если в системе уравнений (2.11) поочередно зафиксировать одну из пространственных переменных. При этом система уравнений (2.11) расщепляется на две системы уравнений, соответствующие направлениям *j=1* и *j =2 (i=1, 2)*:

$$
\begin{aligned}
&\dot{v}_i^{(k)} - \rho_k^{-1}\sigma_{ij,j}^{(k)} = a_{ij}^{(k)} + F_i^{(k)}, \\
&\dot{\sigma}_{ij}^{(k)} - \gamma_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{(k)} = b_{ij}^{(k)},
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

где введены обозначения

$$
\begin{aligned}
&a_{ij}^{(k)} = \rho_k^{-1}(\sigma_{i\beta,\beta}^{(k)} - \sigma_{ij,j}^{(k)}), \\
&b_{ij}^{(k)} = \gamma_{ij}^{(k)} v_{j,i}^{(k)}(1-\delta_{ij}) + \gamma_{33}^{(k)}(v_{\beta,\beta}^{(k)} - v_{i,j}^{(k)})\delta_{ij}.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Дифференциальные уравнения характеристик имеют вид:

$$dx_i = \pm\lambda_{ij}^{(k)} dt\,, \tag{2.14}$$

а условиями на бихарактеристиках являются

$$d\sigma_{ij}^{(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} dv_i^{(k)} = \left(b_{ij}^{(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} \left[a_{ij}^{(k)} + F_i^{(k)} \right]\right) dt\,, \tag{2.15}$$

здесь $\lambda_{ij}^{(k)} = \sqrt{\rho_k^{-1} \gamma_{ij}^{(k)}} \quad c_1^{(k)} \delta_{\alpha j} + c_2^{(k)} (1 - \delta_{\alpha j}))$. Из (2.14) видно, что на каждой из двух гиперплоскостей имеются две пары семейств характеристик, определяющие продольные $\lambda_{jj}^{(k)}$ и сдвиговые $\lambda_{ij}^{(k)}$ $(i \neq j,\ i, j = 1,\ 2\ )$ скорости распространения волн. В каждой из двух плоскостей $(x_j;\ t)$ имеются по два семейства бихарактеристик положительного и отрицательного направлений. Верхний знак соответствует характеристикам положительного, а нижний - отрицательного направлений. Уравнения (2.14) и (2.15) соответствуют друг другу при одинаковой паре индексов и при одинаковом расположении знаков. Уравнения (2.12) и условия (2.15) используются для отыскания решения сформулированной задачи (2.1) – (2.7).

2.2.2. Выбор точечной схемы шаблона

Форма тела такова, что опускает существование системы координат x_i $(i=1,\ 2)$, в котором граничные поверхности являются координатными. Пусть тело D_1 U D_2 разбивается на ячейки, образуемые пересечениями координатных поверхностей $x_i = const$ $(i = 1,\ 2)$. Линейные размеры этих ячеек в направлении осей x_1 и x_2 считаются равномерными и равными h. Пересечения линий $x_i=const$ $(i = 1,\ 2)$ образуют узлы. В этих узловых точках отыскиваются значения искомых функций $v_i^{(k)}$, $\sigma_{ij}^{(k)}$ $(i,\ j=1,\ 2)$ в различные моменты времени t_n-τ, t_n, t_n+τ $(n=1,\ 2,\ ...,\ N\ )$ с шагом по времени τ. Получившаяся сетка является трехмерной. Точечная сетка, на основе которых строится разностная схема, помимо упомянутых узловых точек содержит точки, образованные пересечениями бихарактеристик с гиперплоскостями $t=const$. Принимается шаблон, состоящий из узла O и точек $E_{ij}^{\pm(k)}$, лежащих на координатных линиях $x_j = const$ и отстоящих от точки O на расстояния $\lambda_{ij}^{(k)}\tau$ (рис. 1.3). Наклонные прямые, исходящие из точки A, являются бихарактеристиками. В дальнейшем значениям функций в точке O приписывается верхний знак *«O»*; в точках $E_{ij}^{\pm(k)}$ – нижний *«ij»* и верхний знак ± (например, $\sigma_{ij}^{\pm(k)}$), а в точке A дополнительный индекс не приписывается. Точки O и A представляют собой одну и ту же точку тела в моменты времени, отстоящие друг от друга на один шаг τ по времени.

На основании описанных точечных схем разрабатываемая ниже методика решения динамических задач позволяет определить скорости частиц $v_i^{(k)}$ и компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$ в точке A на нечетном слое по времен t_n, если известны их значения на предыдущем слое t_{n-1} $(n = 1, 2,...,N)$ в точке O и в прилегающих к ней точках $E_{ij}^{\pm(k)}$. Разностные схемы такого типа называются явными [32]. Явные схемы удобны тем, что никаких затруднений при решении связанных с ними систем разностных уравнений не возникает. Эти системы решаются последовательно одного временного слоя к следующему. При этом искомые величины в каждой узловой точке, в отличии от неявной разностной схемы, вычисляются независимо от других.

2.2.3. Разрешающие разностные уравнения во внутренних точках

Ниже построен расчетный алгоритм второго порядка точности [37]. Интегрирование системы уравнений (2.12) от точки O до точки A и соотношений (2.15) от точки $E_{ij}^{\pm(k)}$ до точки A методом трапеции позволяет получить выражения следующего типа

$$\begin{aligned} v_i^{(k)} &= v_i^{0(k)} + \frac{\tau}{2}\left(\rho_k^{-1}\sigma_{ij,j}^{0(k)} + a_{ij}^{0(k)} + F_i^0 + \rho_k^{-1}\sigma_{ij,j}^{(k)} + a_{ij}^{(k)} + F_i^{(k)}\right), \\ \sigma_{ij}^{(k)} &= \sigma_{ij}^{0(k)} + \frac{\tau}{2}\left(\gamma_{ij}^{(k)}v_{i,j}^{0(k)} + b_{ij}^{0(k)} + \gamma_{ij}^{(k)}v_{i,j}^{(k)} + b_{ij}^{(k)}\right), \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\sigma_{\alpha\ \ j}^{(k)} - \sigma_{ij}^{\pm(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} (v_i^{(k)} - v_i^{(k)}) =$$
$$= \frac{\tau}{2} \Big(b_{ij}^{(k)} + b_{ij}^{\pm(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} \Big[a_{ij}^{(k)} + a_{ij}^{\pm(k)} + F_i^{(k)} + F_i^{\pm(k)} \Big] \Big). \tag{2. 17}$$

Значения функций в не узловых точках $E_{ij}^{\pm(k)}$ заменяются величинами, вычисленными по формуле Тейлора с точностью до первого порядка для функций $a_{ij}^{\pm(k)}$ и $b_{ij}^{\pm(k)}$ и с точностью до второго порядка для функций $v_i^{\pm(k)}$ и $\sigma_{ij}^{\pm(k)}$ через их значения в узловых точках $O(x^0_1, x^0_2, t_0)$:

$$a_{ij}^{\pm(k)} = a_{ij}^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial a_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j},$$
$$b_{ij}^{\pm(k)} = b_{ij}^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial b_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j}, \tag{2.18}$$

$$\sigma_{ij}^{\pm(k)} = \sigma_{ij}^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial \sigma_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} (\lambda_{ij}^{(k)} \tau)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j^2},$$
$$v_{\alpha}^{\pm(k)} = v_i^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial v_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} (\lambda_{ij}^{(k)} \tau)^2 \frac{\partial^2 v_i^{0(k)}}{\partial x_j^2}. \tag{2.19}$$

Подставив соотношения (2.18), (2.19) в (2.17), затем исключив при помощи (2.16) переменные $v_i^{(k)}$ и $\sigma_{ij}^{(k)}$ и учитывая (2.18), можно получить восемь уравнений относительно производных $v_{i,j}^{(k)}$ и $\sigma_{ij,j}^{(k)}$ в расчетном слое времени

$$\sigma_{ij,j}^{(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{(k)} = \sigma_{ij,j}^{0(k)} + \tau \Big[\gamma_{ij}^{(k)} v_{i,jj}^{(k)} + b_{ij,j}^{(k)} \Big] \mp$$
$$\mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} \Big(v_{i,j}^{0(k)} + \tau \Big[\rho_k^{-1} \sigma_{ij,jj}^{0(k)} + a_{ij,j}^{0(k)} \Big] \Big) + F_i^{\pm} - F_i^0. \tag{2.20}$$

Складывая и вычитая поочередно соответствующие пары уравнений (1.20), можно найти неизвестные производные

$$v_{i,j}^{(k)} = v_{i,j}^{0(k)} + \tau \Big(\rho_k^{-1} \sigma_{ij,jj}^{0(k)} + a_{ij,j}^{0(k)} \Big) + \frac{1}{2\rho_k \lambda_{ij}} \Big(F_i^- - F_i^+ \Big),$$
$$\sigma_{ij,j}^{(k)} = \sigma_{ij,j}^{0(k)} + \tau \Big(\gamma_{ij}^{(k)} v_{i,jj}^{(k)} + b_{ij,j}^{(k)} \Big) + \frac{1}{2} \Big(F_i^- + F_i^+ - 2F_i^0 \Big). \tag{2.21}$$

Систему уравнений (2.21) можно использовать для определения неизвестных производных как во внутренних, так и граничных узловых точках исследуемой области. Однако важно иметь промежуточные соотношения (2.20), которые используются при решении систем уравнений, где заданы граничные функции. Подстановка равенств (2.21) в (2.16) позволяет получить неизвестные функции $v_i^{(k)}$ и $\sigma_{ij}^{(k)}$ во внутренних узловых точках неоднородного тела в момент времени $t_n + \tau$ $(n = 1, 2, ..., N)$.

2.2.4. Разностные уравнения в граничных точках

На граничных линиях $x_j = const$ заданы два компонента напряжения (см. (2.2) - (2.4)). В расчетах не могут быть использованы два условия из (2.20), условия на двух характеристиках, не принадлежащих исследуемой области. Тем самым, по сравнению с внутренними точками число уравнений (2.20) сокращается на два. Совокупность оставшихся уравнений (2.20), (2.16) и двух граничных условий из (2.2) - (2.4) является замкнутой линейной системой относительно тринадцати неизвестных (восьми производных и пяти функций). Точки контактных линий также рассматриваются как граничные точки только для отдельных областей D_1 U D_2 В каждой из этих точек сопряжения число уравнений (2.20), (2.16) равно 22, а неизвестных 26. Замкнутая система уравнений получается, если использовать наряду с уравнениями (1.16), (1.20) четыре условия жесткого сцепления полосы и полуплоскости (2.5).

2.2.5 Разностные уравнения в свободных угловых точках

На угловых точках, образовавшихся пересечением двух границ, все условия заданные на двух границах должны выполнятся. Поэтому в угловых точках задаются четыре условия, которые взамен четырем условиям на четырех бихарактеристиках, не принадлежащих области D_1 U D_2, замыкают систему линейных уравнений относительно тринадцати неизвестных.

В верхних угловых точках тела D_2 (рис. 2.1) заданы четыре компонента тензора напряжений. В силу закона парности касательных напряжений только три из них являются линейно – независимыми. Число неизвестных производных можно сократить непосредственным дифференцированием граничных функций $\sigma_{ij}^{(k)}$, $(i \neq j)$ в (2.3), (2.4), тем самым, получаются, что производные $\sigma_{21,1}^{(k)} = 0$ и $\sigma_{12,2}^{(k)} = 0$. Остальные неизвестные вычисляются при последовательном решении уравнений (2.20) и (2.16).

2.2.6 Разностные уравнения в контактных угловых точках

Нижние угловые точки тела D_2 являются контактными точками неоднородной среды D_1 U D_2, которые имеются особенности. Развивая идеи, впервые описанные в [24], вычисляются разностные уравнения в контактных угловых точках исследуемого тела. В этих особых точках из физических соображений принимается, что компоненты напряжений $\sigma_{12}^{(2)} = 0$ и $\sigma_{22}^{(2)} = 0$ и используются условия контакта (2.5).

В этих особых точках производные $v_{i,2}^{(1)}$ и $\sigma_{i2,2}^{(1)}$ могут терпеть разрывы. Поэтому предполагается, что область D_1 по линии продолжения боковых сторон тела D_2 мысленно разделить на подобласти (I), (II). Тем самым, около особых точек рассматриваются три подобласти (I), (II), (III) (Рис. 2.1). Для подобластей (I) и (II) принимаются условия непрерывности функций

$$v_i^{(I)} = v_i^{(II)}, \quad \sigma_{ij}^{(I)} = \sigma_{ij}^{(II)} \quad (i,j=1,2), \tag{2.22}$$

и их производных

$$v_{i,1}^{(I)} = v_{i,1}^{(II)}, \quad \sigma_{i1,1}^{(I)} = \sigma_{i1,1}^{(II)} \quad (i=1,2), \tag{2.23}$$

Двенадцать производных для первой среды и восемь производных для второй среды вычисляются по формуле (2.21). Подставляя в уравнение (2.16) производные, найденные таким образом, для каждой подобласти и выполняя условия (2.5), (2.22) и (2.23), вычисляются неизвестные функции в этих точках, как многосвязаных узлах совокупности подобластей (I), (II), (III).

$$v_1^{(1)} = v_1^{(2)} \quad v_1^{0(1)} + \frac{\tau}{2}\left(\frac{\sigma_{11,1}^{0(1)} + \sigma_{11,1}^{(1)}}{2} + \frac{\sigma_{11,1}^{0(2)} + \sigma_{11,1}^{(2)}}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma_{12,2}^{0(I)} + \sigma_{12,2}^{(I)} + \sigma_{12,2}^{0(II)} + \sigma_{12,2}^{(II)}}{4} + \frac{\sigma_{12,2}^{0(III)} + \sigma_{12,2}^{(III)}}{2}\right),$$

$$v_2^{(1)} = v_2^{(2)} \quad v_2^{0(1)} + \frac{\tau}{2}\left(\frac{\sigma_{21,1}^{0(1)} + \sigma_{21,1}^{(1)}}{2} + \frac{\sigma_{21,1}^{0(2)} + \sigma_{21,1}^{(2)}}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma_{22,2}^{0(I)} + \sigma_{22,2}^{(I)} + \sigma_{22,2}^{0(II)} + \sigma_{22,2}^{(II)}}{4} + \frac{\sigma_{22,2}^{0(III)} + \sigma_{22,2}^{(III)}}{2}\right),$$

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} \quad \sigma_{11}^{0(1)} + \frac{\tau}{2}\left(\gamma_{11}^{(1)} \frac{v_{1,1}^{0(1)} + v_{1,1}^{(1)}}{2} + \gamma_{11}^{(2)} \frac{v_{1,1}^{0(2)} + v_{1,1}^{(2)}}{2} + \right.$$

$$\left. + \gamma_{33}^{(1)} \frac{v_{2,2}^{0(I)} + v_{2,2}^{(I)} + v_{2,2}^{0(II)} + v_{2,2}^{(II)}}{4} + \gamma_{33}^{(2)} \frac{v_{2,2}^{0(III)} + v_{2,2}^{(III)}}{2}\right),$$

$$\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = 0.$$

Функции $\sigma_{22}^{(k)}$ (k=1, 2) терпят разрыв в этих точках и имеют вид

$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{0(1)} + \frac{\tau}{2}\left(\gamma_{11}^{(1)} \frac{v_{2,2}^{0(I)} + v_{2,2}^{(I)} + v_{2,2}^{0(II)} + v_{2,2}^{(II)}}{2} + \gamma_{33}^{(1)}\left(v_{1,1}^{0(1)} + v_{1,1}^{(1)}\right)\right),$$

где верхние арабские цифры означают принадлежность соответствующих параметров k-ой среде (k=1, 2), а римские цифры для i-ой подобласти.

Относительно сказанного в пунктах 2.2.3. - 2.2.6. можно заметить, что значения производных в узловых точках исследуемой области на нижнем слое по времени вычисляются с использованием центральной разности во внутренних узловых точках, а в граничных точках соответствующим аппроксимациями «вперед» и «назад».

2.3. Динамическое напряженное состояние прямоугольного упругого тела при продольном давлении

2.3.1. Постановка задачи

Рассматривается изотропное однородное упругое тело, находящееся в прямоугольной декартовой системе координат, плоское сечение которого является прямоугольником $0\leq x \leq L_1$, $|x_2| \leq L_2$ (рис. 2.2.). В начальный момент времени, тело находится в состоянии покоя, т.е. при $t=0$

$$v_i=0, \quad \sigma_{ij}=0 \qquad (i,j=1,2).$$

Кроме того, для рассматриваемой ограниченной области формулируется граничные условия. В момент времени t верхняя граница прямоугольник подвергается динамическому возмущению, т.е. при $x_1=0,\ |x_2|\leq L_2$

$$\sigma_{11}=f(t)\ , \quad \sigma_{12}=0,$$

боковые границы тела свободны от напряжения, т.е. при $|x_2|=L_2$, $0\leq x_1 \leq L_1$

$$\sigma_{12}=0, \quad \sigma_{22}=0,$$

нижняя граница жестко закреплена т.е. при $x_1=L_1,\ |x_2|\leq L_2$

$$v_1=0, \quad v_2=0.$$

Необходимо исследовать волновое движение внутри рассматриваемого тела при t>0

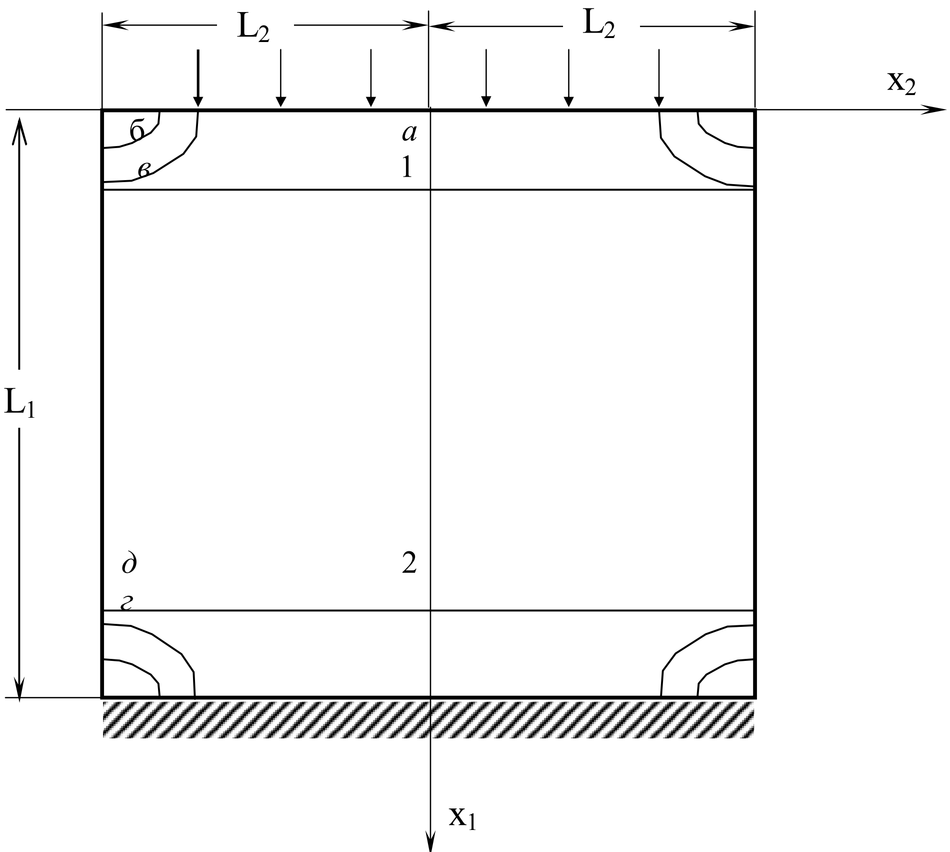


Рис. 2.2. Расчетная область.

2.3.2. Анализ результатов расчета

Расчет был произведен для стали *(ρ=7900 кг/м^3, c_1=5817 м/сек, c_2=3109 м/сек)* при следующих безразмерных значениях исходных данных:

$$f(x)=-te^{-t}\ ,\ \tau=0.025\ ,\ h=0.05\ ,\ L_1=0.45\ ,\ L_2=0.25.$$

Поскольку исследуемое тело имеет свободные поверхности $|x_1|=0{,}25$, то со временем накладывающийся друг на друга волны отражений определяет сложный характер проявления в нем скоростей перемещений, деформаций и напряжений.

На рис. 2.2. схематизированы типы волн, определяющие напряженность точек тела. Возмущенная область *а*, передним фронтом которой является линия 1, определяется заданной нагрузкой *f(t)*, изменяющая во времени. Угловые точки полосы являются источниками возмущения, вызывающим как продольные (области *в* и *д*), так и поперечные (области *б* и *г*) волны. Наконец, от закрепленной поверхности распространяется отраженная волна, передний фронт которой обозначен линией 2.

Исследование устойчивости показало, что сеточное отношение τ/h, равное 0.5, обеспечивает устойчивые результаты для достаточно большого времени. Фактически расчет был выполнен до t=300τ.

Из-за симметрии условий закрепления и характера нагружения искомые параметры v_1, σ_{11}, σ_{22} являются четными, а v_2, σ_{12} – нечетными относительно оси x2=0. В связи с этим на рис. 2.3 – 2.5 приведены результаты расчетов для положительных значений x_2.

На рис. 2.3 – 2.5 представлены осциллограммы продольных v_1 и поперечных v_2 скоростей частиц, нормальных σ_{11}, σ_{22} и касательных σ_{12} напряжений на интервале времени $t\in[0;\ 300\tau]$ в трех фиксированных точках наблюдения – 1 ($x_1=0h;\ x_2=3h$), 2 ($x_1=3h;\ x_2=3h$), 3 ($x_1=6h;\ x_2=3h$).

На рис. 2.3 показаны, что нормальные напряжения σ_{11} (пунктирные кривые) и продольные скорости v_1 (сплошные кривые) в значительной степени повторяют форму граничного воздействия с последовательным переходом в нижние слои по координате x_2. Нормальные напряжения σ_{11} в точке 1 принимает все время отрицательное значение согласно заданному граничному условию. А в других точках повтор формы граничного воздействия нарушаются приблизительно к моменту прихода отраженной волны от закрепленной нижней границы. Это означает, что распространение волны основном происходит в продольном направлении. Начиная с момента 70τ нормальные напряжения σ_{11} меняются гармоническими колебаниями около линии граничного воздействии. Продольные скорости v_1 изменяют свои направления из-за дифрагированных волн, исходящих из угловых точек и закрепленной границы, периодически переходя от положительного к отрицательному импульсу и наоборот. Изменения амплитуды происходит медленно, что опять таки подтверждает, что распространение волны основном происходит в продольном направлении.

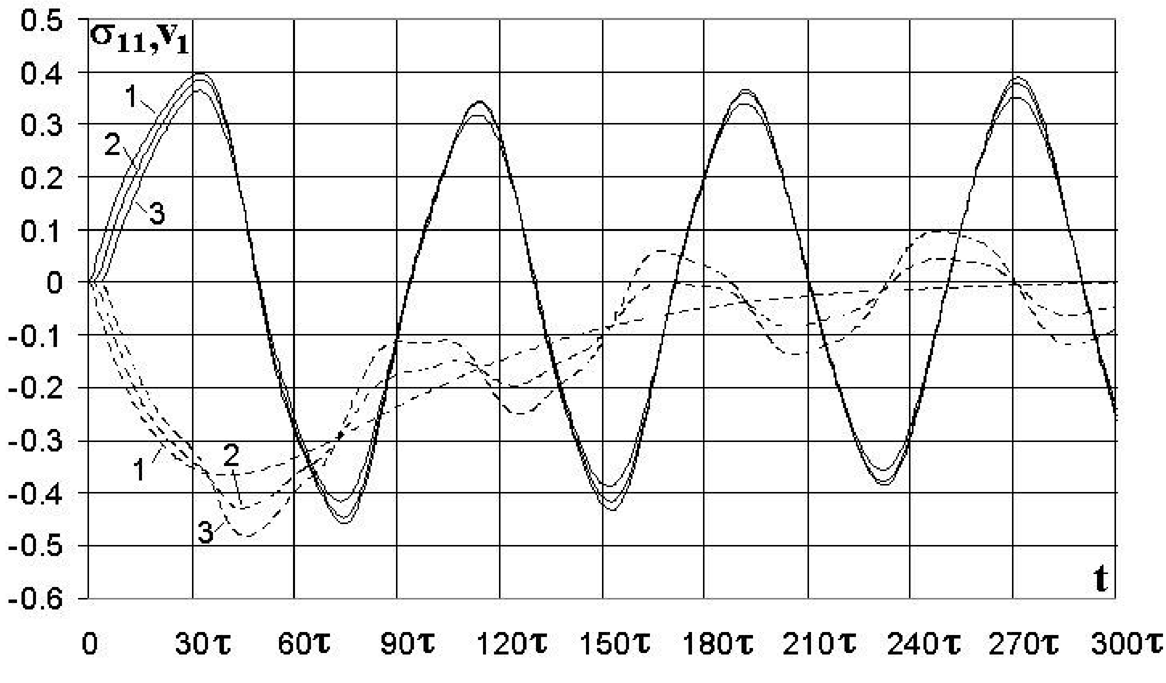


Рис 2.3. Осциллограммы продольных скоростей v_1 (сплошные кривые)

и нормальных напряжений σ_{11} (пунктирные кривые) в точках:

1.(x_1=0; x_2=3h), 2.(x_1=3h; x_2=3h), 3.(x_1=6h; x_2=3h), 4.(x_1=9h; x_2=3h).

На рис.2.4 показаны, что нормальные напряжения σ_{22}, которые в начальные моменты времени значительной степени повторяют форму граничного воздействия с последовательным переходом в нижние слои по координате x_2, но с меньшей амплитудой. Нормальные напряжения σ_{22} меняются гармонически, переходя от положительного к отрицательному импульсу и наоборот.

Изменения поперечных скоростей v_2 (сплошные кривые), касательных напряжений σ_{12} (пунктирные кривые) во времени в тех же трех точках представлены на рис.2.5. На рис.2.5 касательное напряжение σ_{12} в точке 1 (на границе $x_1=0$) равно нулю и в остальных точках они изменяются плавно и четко прослеживается существование продольной и поперечной скоростей. Поперечная v_2 скорость качественно повторяет форму продольной скорости v_1. Однако, она по амплитуде примерно в три раза меньше, чем продольная скорость.

На рис.2.6 – 2.10 представлены изолинии нормальных напряжений σ_{11} для различных моментов времени (t=10τ на рис.2.6; t=30τ на рис.2.7; t=50τ на рис.2.8, t=80τ на рис.2.9 и t=120τ на рис.2.10), которыми определены распределения напряжения в однородном теле.

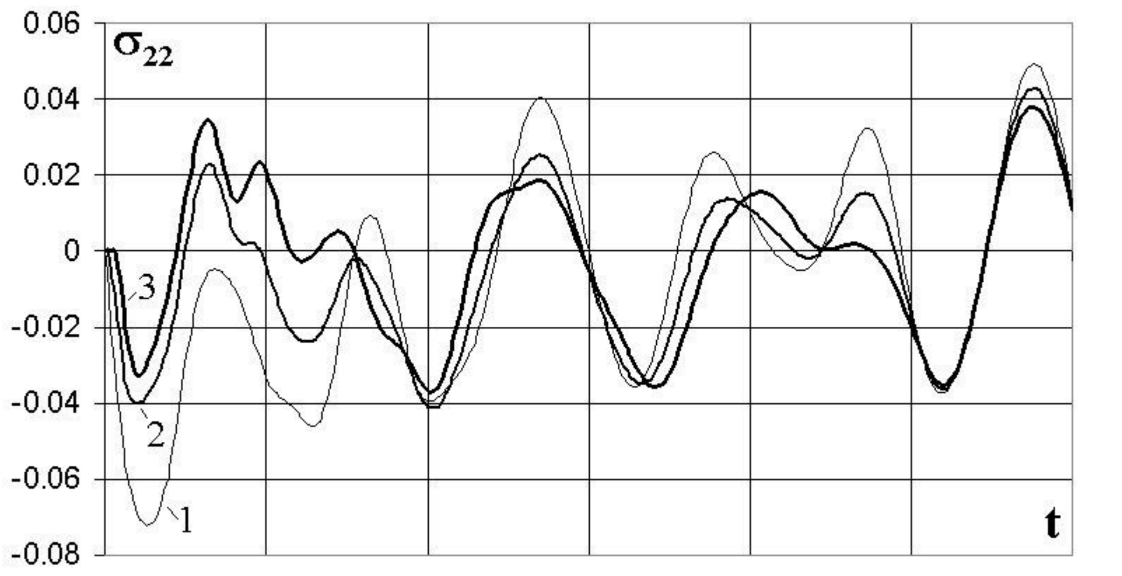


Рис 2.4. Осциллограммы нормального напряжения σ_{22} в точках:

1.(x_1=0h; x_2=3h), 2.(x_1=3h; x_2=3h), 3.(x_1=6h; x_2=3h).

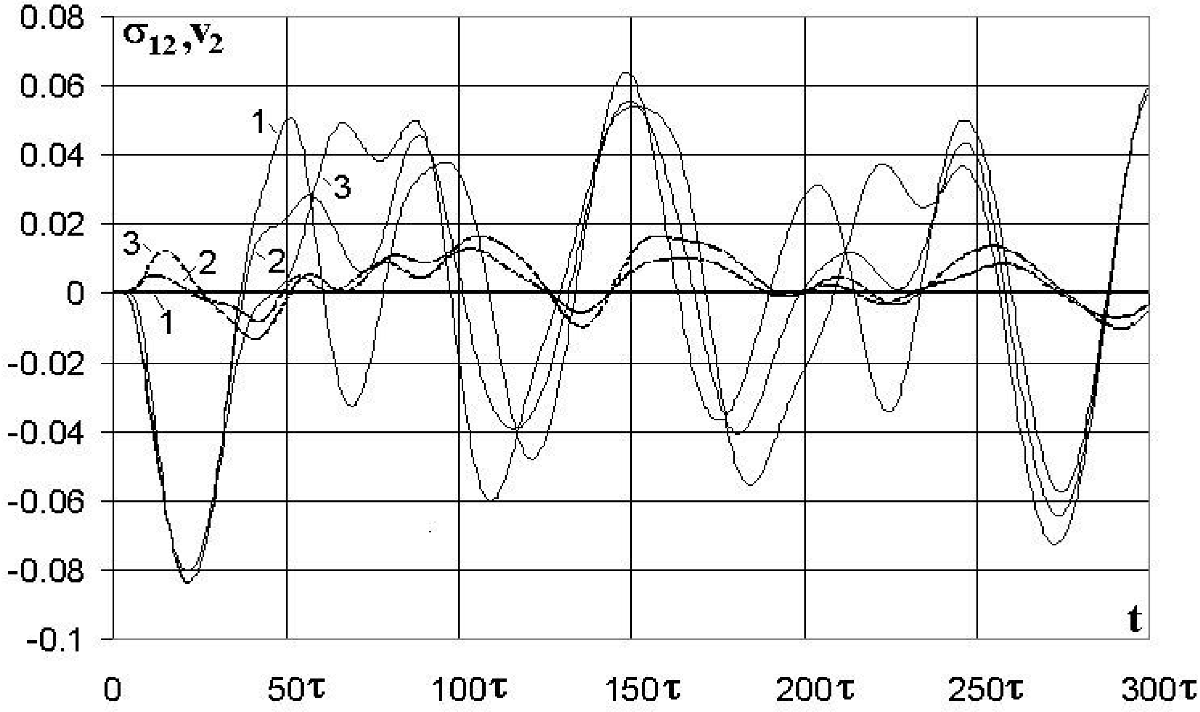


Рис.2.5. Осциллограммы поперечных скоростей v_2 (сплошные кривые) и касательных напряжений σ_{12}(пунктирные кривые) в точках:

1.(x_1=0h; x_2=3h), 2.(x_1=3h; x_2=3h), 3.(x_1=6h; x_2=3h).

Рис.2.6 – 2.10 показывает движение волн нормальных напряжений σ_{11}. Здесь видно, как волны нормальных напряжений σ_{11} распространяются от торца с динамической нагрузкой (x_1=0) к закрепленному торцу (x_1=L_1). Затем, отражаясь от закрепленного торца, движется обратно, образуя сложную интерференционную картину.

Анализ полученных результатов показывает, что в полосе отчетливо наблюдается двумерный характер волнового процесса, и соответствует физическому содержанию поставленной задачи. А разработанная разностная схема удовлетворяет необходимым условиям устойчивости и не теряет устойчивости на достаточно длительных отрезках времени (исследовано до t =300τ).

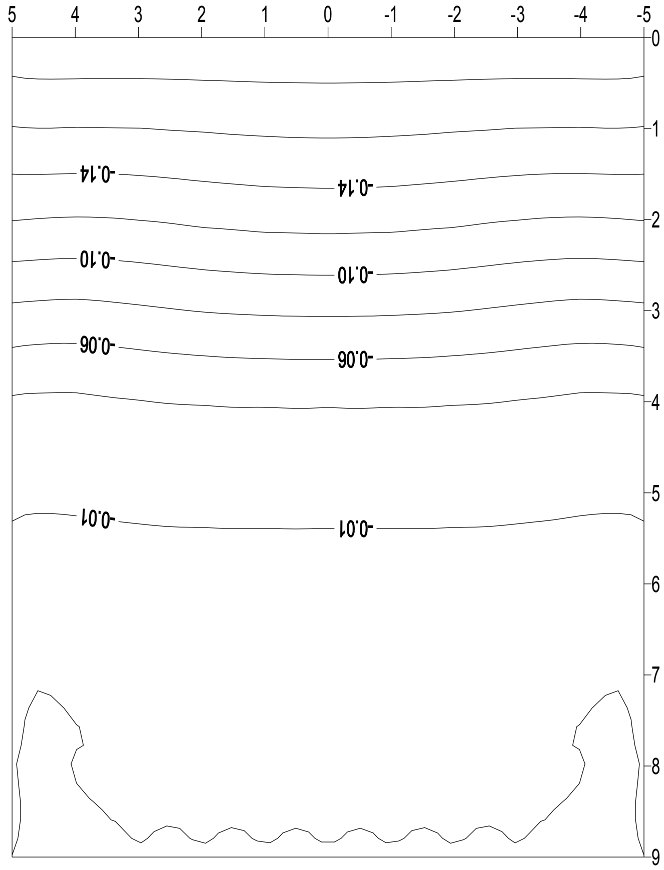


Рис.2.6. Изолинии σ_{11} в момент времени $t=10\tau$

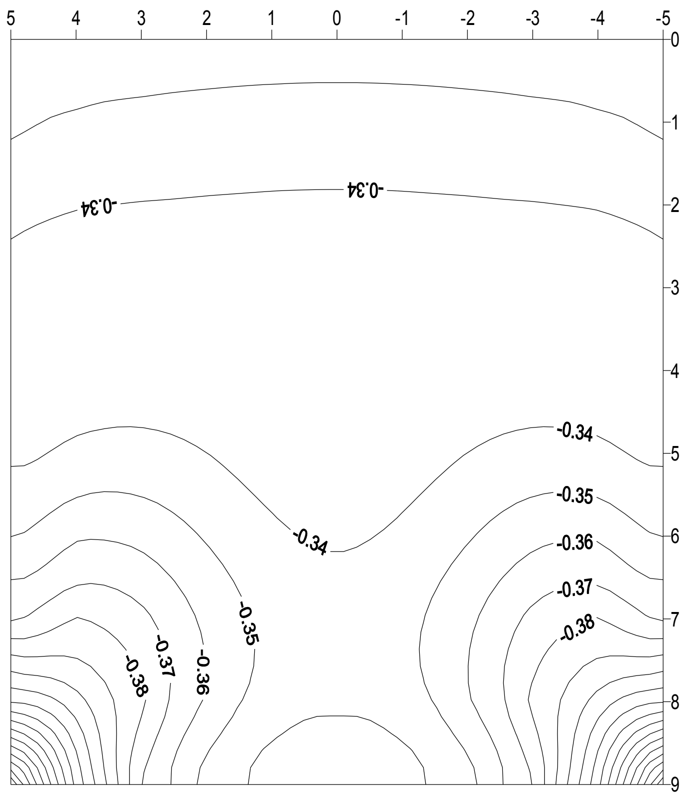


Рис.2.7. Изолинии σ_{11} в момент времени t=30τ.

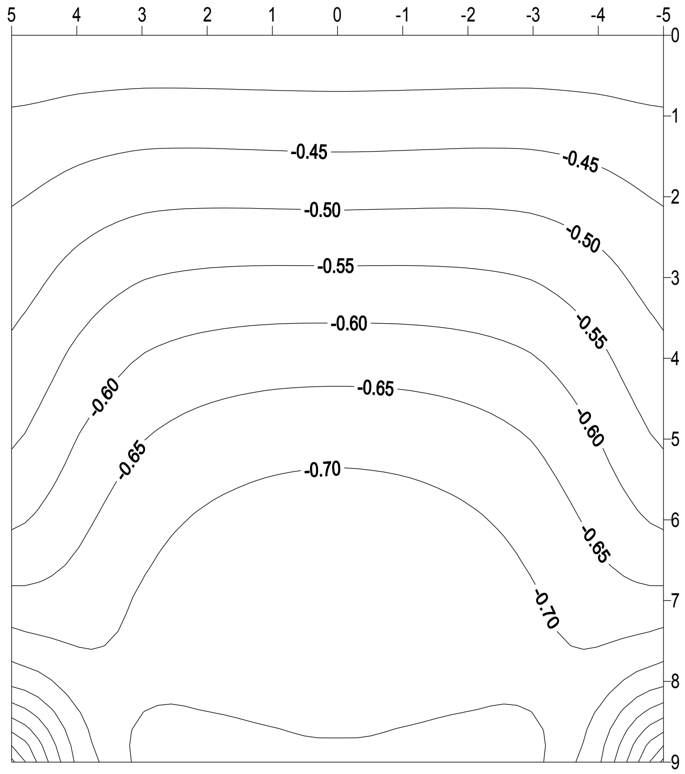


Рис.2.8. Изолинии σ_{11} в момент времени t=50τ.

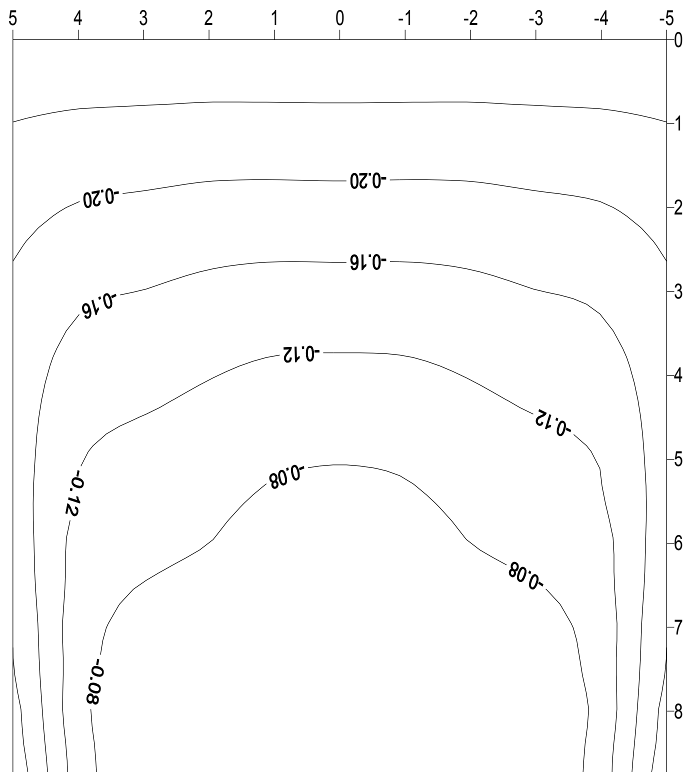


Рис.2.9. Изолинии σ_{11} в момент времени t=80τ.

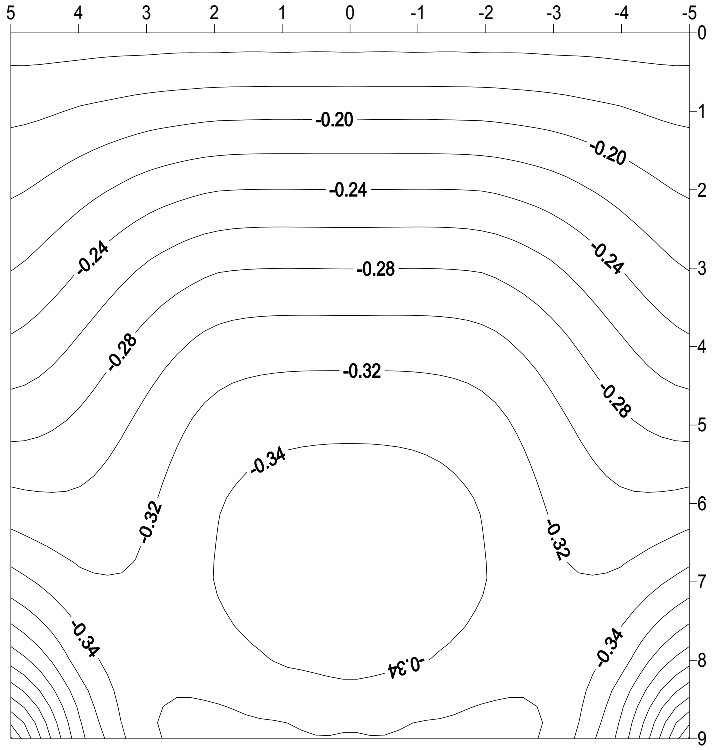


Рис.2.10. Изолинии σ_{11} в момент времени $t=120\tau$.

2.4. Динамическое напряженное состояние упругой полуполосы при боковом импульсном давлении

2.4.1. Постановка задачи

Рассматривается плоская деформация упругой полуполосы конечной ширины, которая в декартовой системе координат x_1Ox_2 занимает область $0 \leq x_2 \leq \infty$, $|x_1| \leq l$ (рис. 2.11.). В начальный момент времени тело находится в состоянии покоя:

$$v_i = 0; \quad \sigma_{ij} = 0.$$

В любой другой момент времени $t_n + \tau$ $(n=1, 2,..., N)$ на участке $N_1 \le x_2 \le N_2$, $x_1 = l$ границы BN действует равномерно распределенная нестационарная нормальная нагрузка $f(t)$, изменяющаяся по закону синуса:

$$\sigma_{11}(t) = \begin{cases} A\sin(\omega t), & при\ 0 \le t \le S_1 \\ 0, & при\ t \ge S_1 \end{cases}$$

$$\sigma_{12}(t) = 0,$$

здесь S_1 – время действия нагрузок, при этом $\omega = \pi / S_1$. Остальная часть границы полуполосы свободна от какого-либо воздействия:

$$\sigma_{22}(t) = 0, \quad \sigma_{12}(t) = 0, \quad при \quad x_2 = 0 \ и \ |x_1| \ge l$$

$$\sigma_{11}(t) = 0, \quad \sigma_{12}(t) = 0, \quad при \quad 0 \le x_2 \notin (N_1, N_2) \ и \ |x_1| = l$$

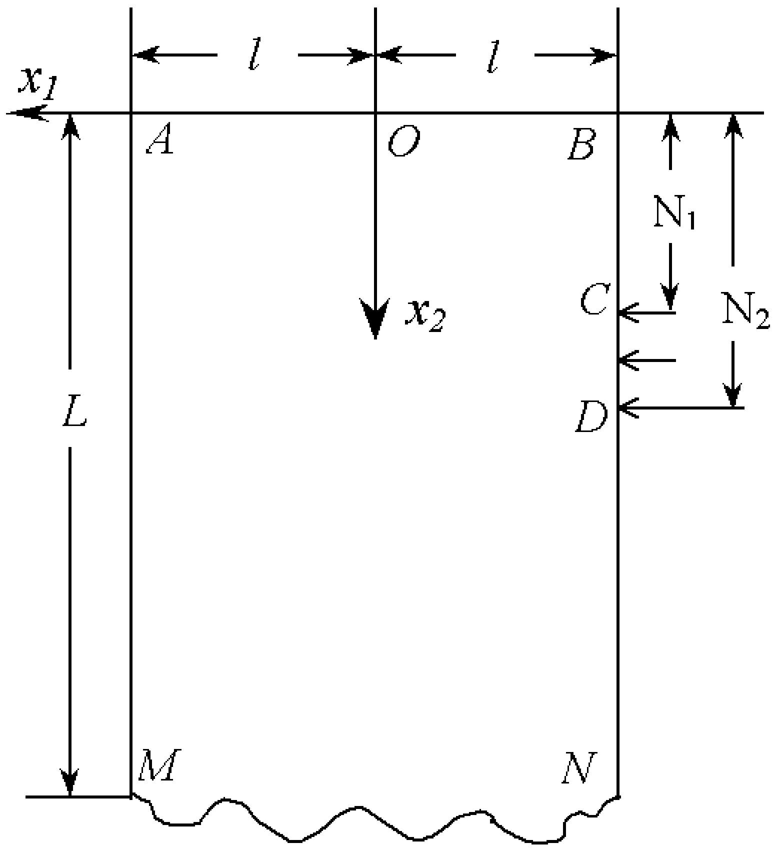


Рис.2.11. Расчетная область.

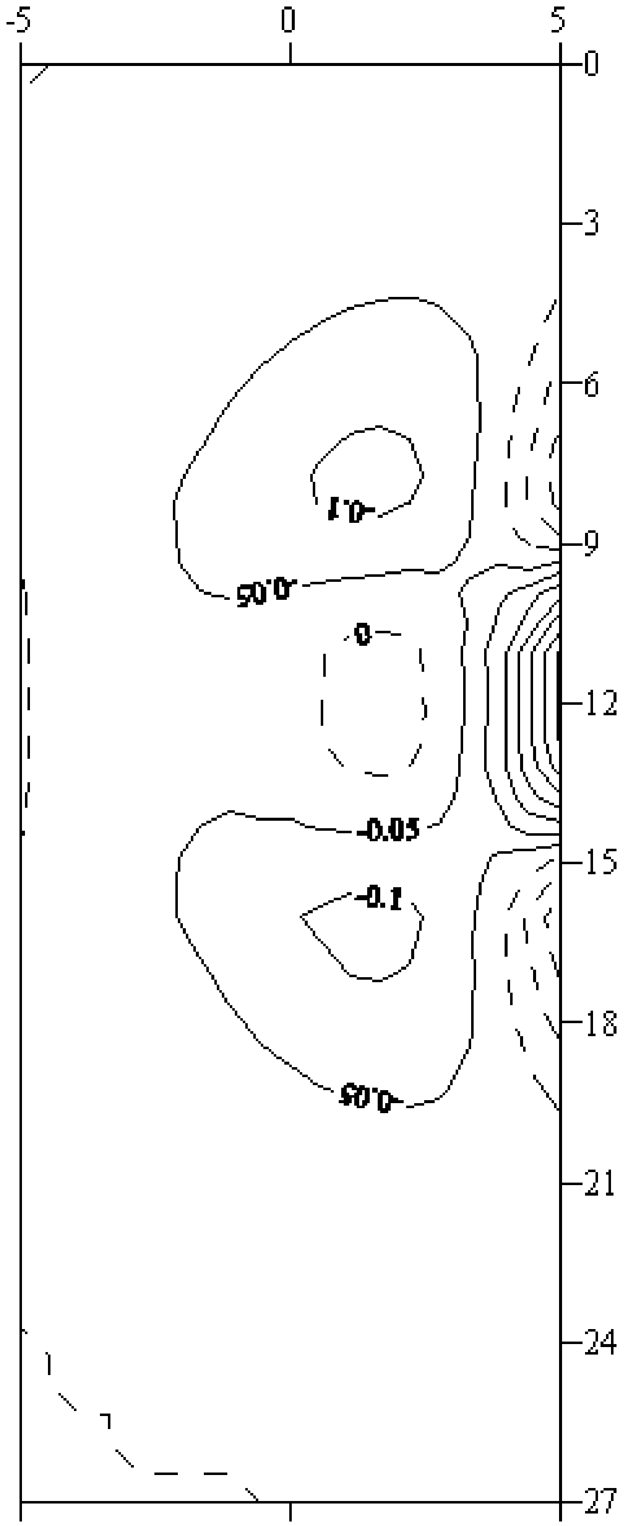
При описанных условиях необходимо исследовать напряженное состояние упругого тела при $t > 0$.

2.4.2. Анализ результатов расчета

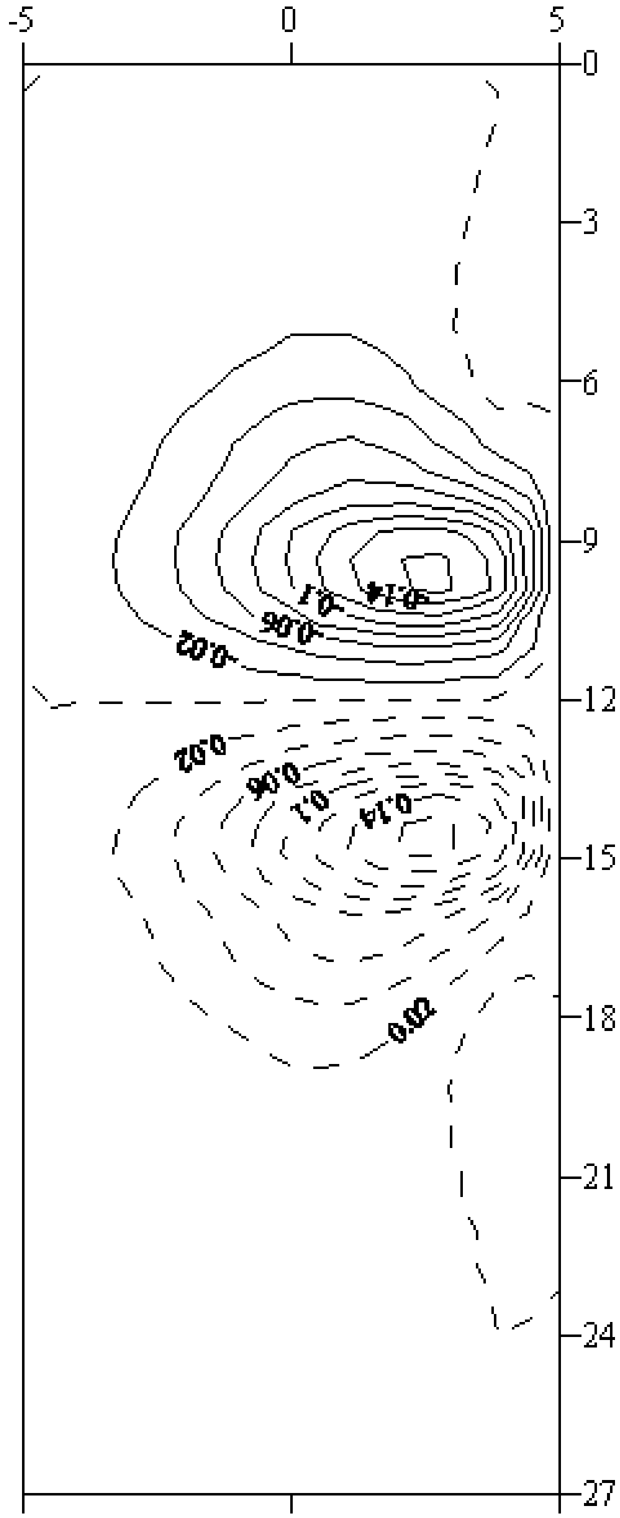
Расчет был произведен для стали (ρ=7900кг/м^3, c_1=5817м/сек, c_2=3109м/сек) при следующих значениях исходных данных: $\tau=0,025$, $h=0,05$, $A=0,5$, $\omega=4,5$, $l=5h$, $L=70h$, $N_1=10h$, $N_2=14h$.

На рис.2.12 приведены изолинии нормальных σ_{11} и касательных σ_{12} напряжений, соответствующие моменту времени $t=20\tau$. За это время граничные возмущения, распространяющие от локального участка воздействия, проходят расстояние $10h$ и достигает противоположной границы MA. Ось $x_2=12h$ является осью симметрии волновой картины. При этом нормальные напряжения σ_{11} являются четной, а касательные напряжения σ_{12} нечетной функцией относительно этой оси. Можно заметить область концентрации напряжений вблизи особых точек $x_2=N_1$, $x_1=l$ и $x_2=N_2$, $x_1=l$, являющихся точками разрыва граничных условий.

В момент времени $t=40\tau$ (рис. 2.13) характерная для момента времени $t=20\tau$ симметричность полей напряжений относительно оси $x_2=12h$ еще просматривается вблизи оси симметрии. С удалением от этой оси симметричность изолиний нарушается. Этот результат объясняется влиянием на характер распространения напряжений от свободного торца AB в области $x_2\leq N_1$ и отсутствием подобных эффектов в области $x_2\geq N_2$. Из-за того, что внешняя нагрузка уже равна нулю, значения локальных экстремумов уменьшаются по сравнению с предыдущим моментом времени ($t=20\tau$). При отражении плоских волн от свободной поверхности MA нормальных σ_{11} напряжения меняют знак (становятся растягивающими). На рисунке 2.13а) представлено распределение нормальных напряжений σ_{11}. Растягивающие напряжения σ_{11}, обусловленные отражением волны от свободной поверхности MA, практически симметричны относительно оси нагружения $x_2=12h$ и в рассматриваемый момент времени достигают максимального значения на свободной поверхности. Известное явление откола могут быть вызвано именно этими растягивающими напряжениями.



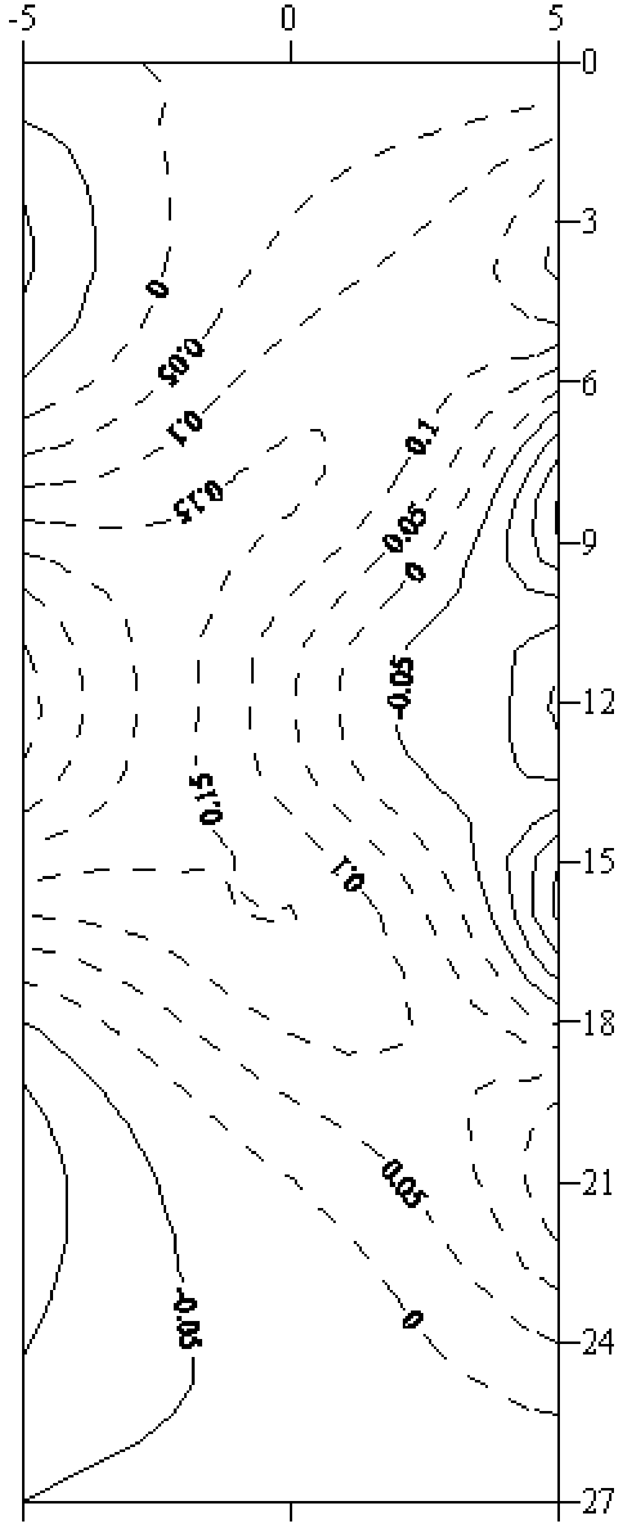
-5
0
5
0
3
6
9
12
15
18
21
24
27
-0.1
-0.05
0
-0.05
-0.1
-0.05



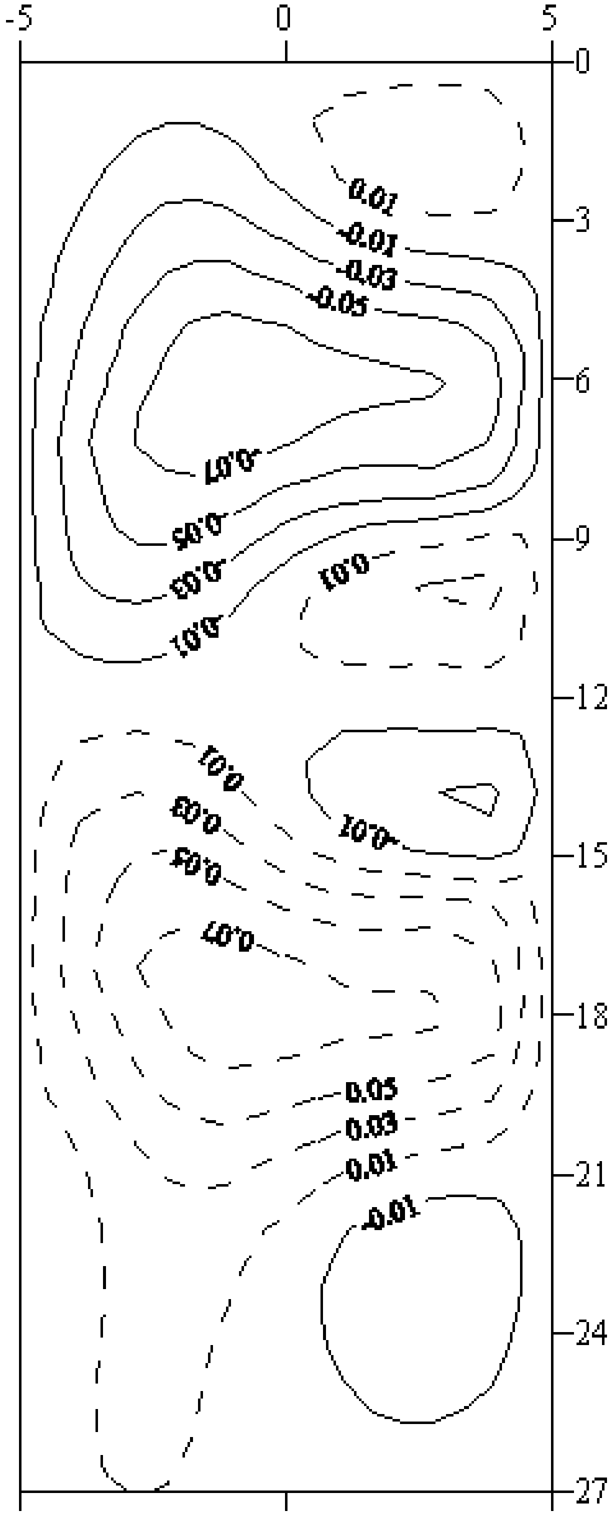
а) б)

Рис.2.12. Изолинии а) нормального напряжения σ_{11} и

б) касательного напряжения σ_{12} при $t=20\tau$.



-5
0
5
0
3
6
9
12
15
18
21
24
27
0
0.05
0.1
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
0.15
0.1
0.05
0
-0.05



а) б)

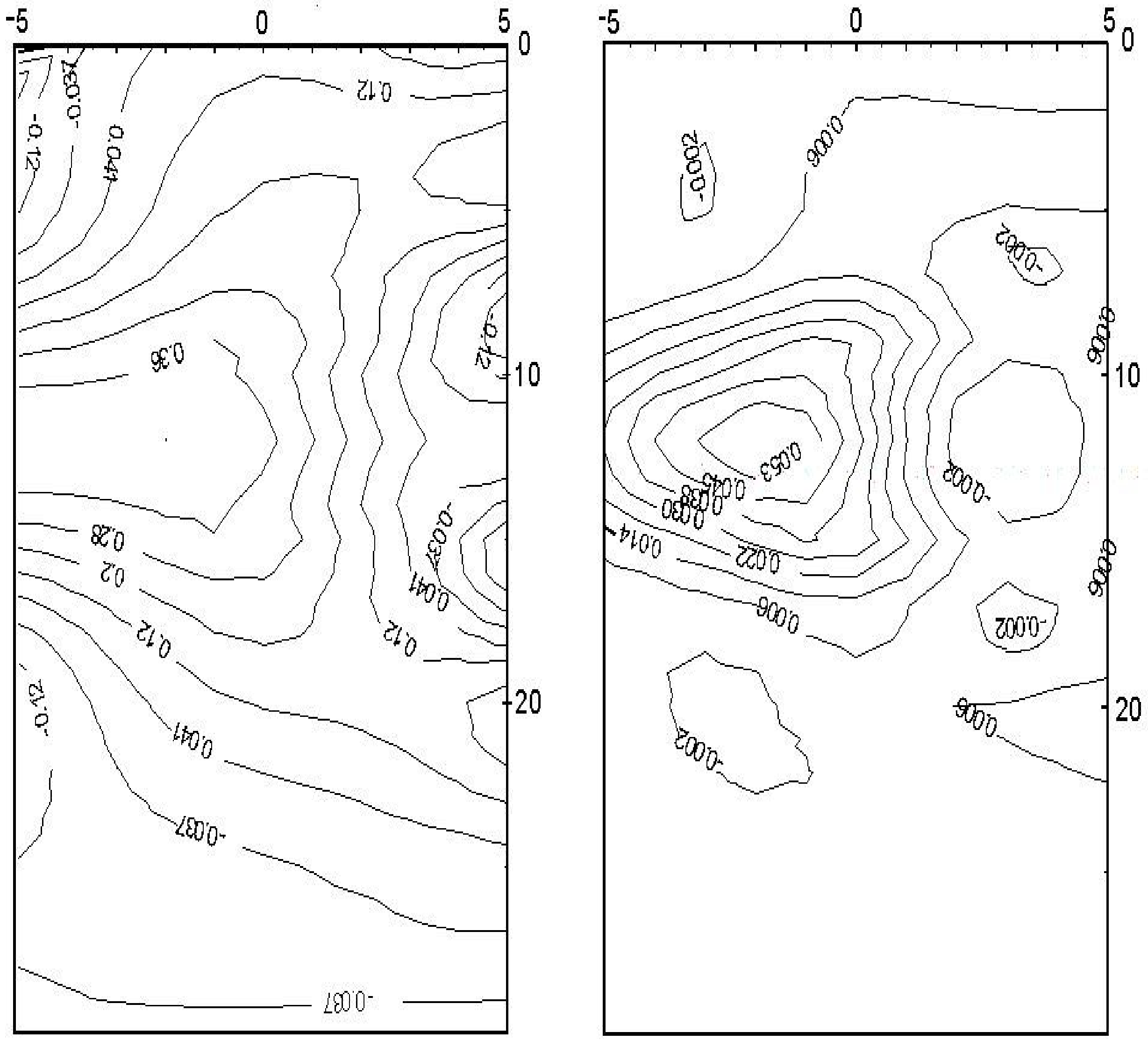
Рис.2.13. Изолинии а) нормального напряжения σ_{11} и

б) касательного напряжения σ_{12} при $t=40\tau$.

На рис. 2.14 приведены изолинии инвариантов тензора напряжений:

$$I_1=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33} \text{ и } I_2=\sigma_{11}\,\sigma_{22}-\sigma_{12}\,\sigma_{12}+\sigma_{33}\,\sigma_{11}+\sigma_{33}\,\sigma_{22},$$

характеризующие давление и интенсивность касательных напряжений в полосе. Изолинии первого инварианта во многом сходны с изолиниями нормального напряжения σ_{11}. Отсюда можно сделать вывод, что напряженно - деформированное состояние исследуемого тела при указанных воздействиях во многом зависит от σ_{11}. Здесь сказывается кратковременность боковых воздействий и близость верхней грани.



а) б)

Рис.2.14. Изолинии а) первого и б) второго инварианта тензора напряжений при $t=40\tau$.

2.5. Дифракция преломленных волн в поверхностном упругом теле

Расчет был произведен для грунта (D_1) и (D_2) бетона при следующих безразмерных значениях исходных данных: ρ_1=1; $c_1^{(1)}$=0,964; $c_2^{(1)}$=0,557; ρ_2=1; $c_1^{(2)}$=1; $c_2^{(2)}$=0,612; $\tau=0,025$; $h=0,05$; $d_1=1$; $d_2=0,5$; $L=4,8$; $d=0,45$; d_3 варируется $d_3=0$ и $d_3=5$.

2.5.1 Дифракция преломленных волн при сбросе вертикальных напряжений на трещине

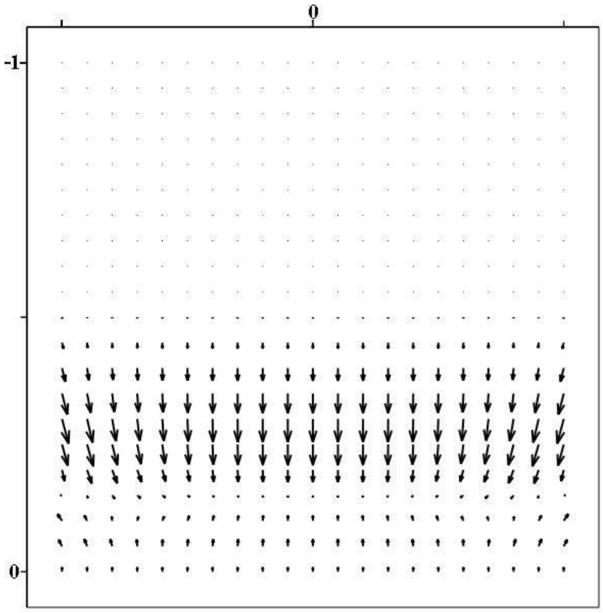
Скачок напряжений на трещине задается в виде (рис.1.4)

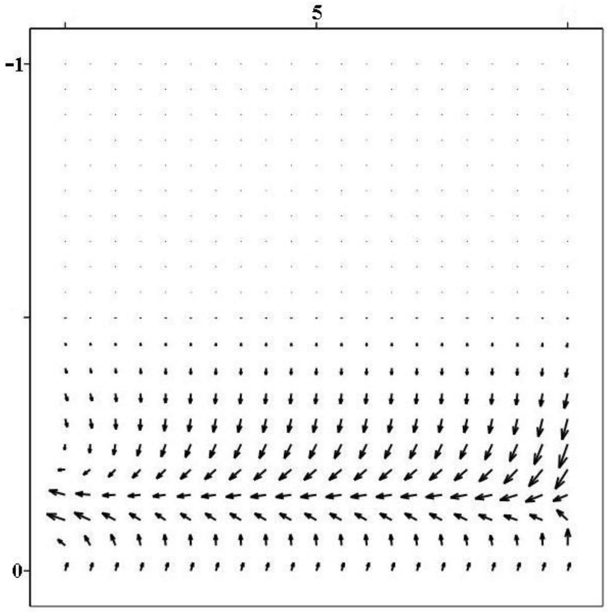
$$P_1(x,t) = 20 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-10t} H(t)\,, \quad P_2(x,t) = 0\,,$$

и параметр дельтаобразной функции $\varepsilon = h=0,05$.

Скорости распространения продольных волн в безразмерных величинах составляют $c_1^{(1)}$=0,964 и $c_1^{(2)}$=1 соответственно для первой и второй среды. Отсюда следует, что продольные волны от трещин к точке $O(0;\ 0)$ придут за время t_1=5 соответственно, а в точку $A(0;\ 5)$ за t_2=6,75. Так как динамику полуплоскости мы рассматривали в первом разделе, далее дается анализ результатов для поверхностного включения с момента времени t_1=5 для $d_3=0$ (включение стоит на эпицентре) и t_2=6,75 для $d_3=5$ (включение стоит на расстоянии *5* от эпицентра).

На рис.2.15 представлены векторные поля скоростей точек тела D_2 в момент времени, когда преломленные волны распространилась до середины включения. При $d_3=0$ (рис. 2.15а) распространяется только продольная волна, и можно заметить эффект взаимодействия с боковой поверхностью. А при $d_3=5$ (рис. 2.15б) за продольной волной следует и поперечная волна, что соответствует типу воздействия. Здесь тоже заметен эффект взаимодействия, но сильнее с правой стороной. Это объясняется тем что включение стоит справа от эпицентра.





а) $d_3=0,\ t=5{,}5$ б) $d_3=5,\ t=7{,}25$

Рис.2.15. Векторное поле скоростей точек тела D_2 в момент, когда преломленные волны достигли его середины.

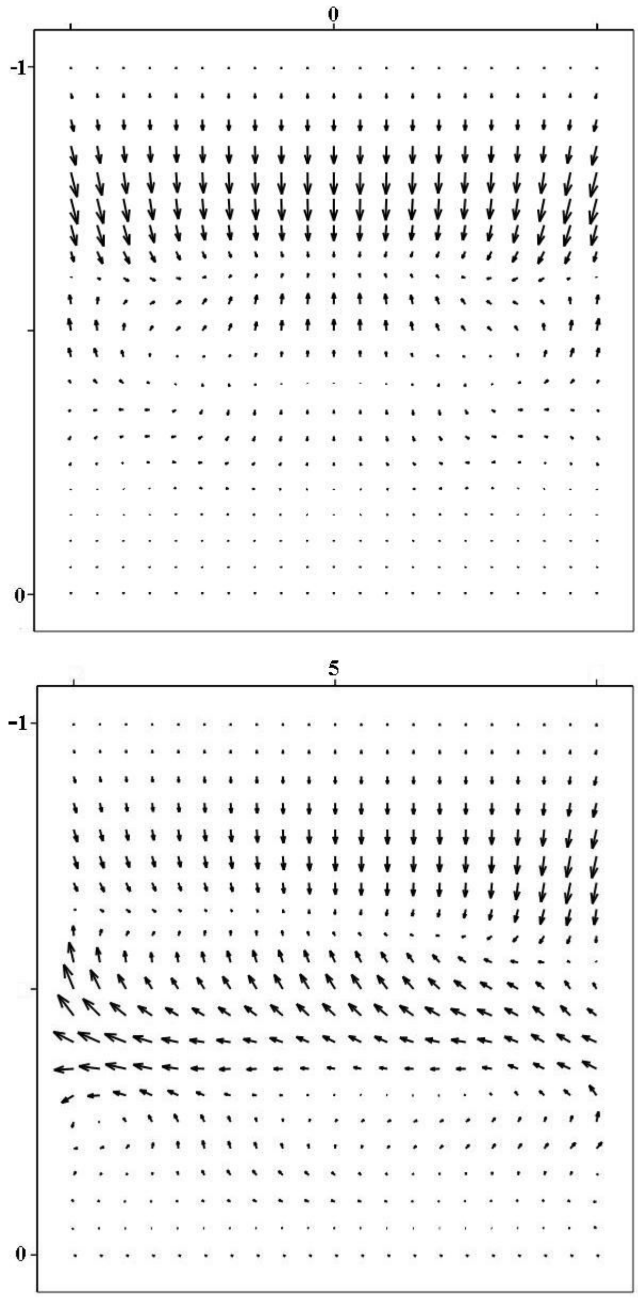
На рис.2.16 представлены векторные поля скоростей точек тела D_2 в момент времени, когда преломленная волна только добежала до верхнего торца. На рис.2.16а можно заметить, что за продольной волной начинается образование слабых поперечных волн, а на рис.2.16б можно заметить, что отраженная с правой боковой стороны волна подхваченный поперечной волной добежала до левой стороны.

На рис.2.17 представлены векторные поля скоростей точек тела D_2 в момент времени, когда преломленные волны отразились от верхнего торца. Здесь наблюдается сложная дифракционная картина. На рис.2.17а можно заметить, что верхние угловые точки работают как источники продольной и поперечной волн.

На рис.2.18 - 2.23, представлено изолинии первого и второго инвариантов тензора напряжении порождаемое волнами напряженного состояние среды:

$$I_1=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33} \text{ и } I_2=\sigma_{11}\,\sigma_{22}-\sigma_{12}\,\sigma_{12}+\sigma_{33}\,\sigma_{11}+\sigma_{33}\,\sigma_{22},$$

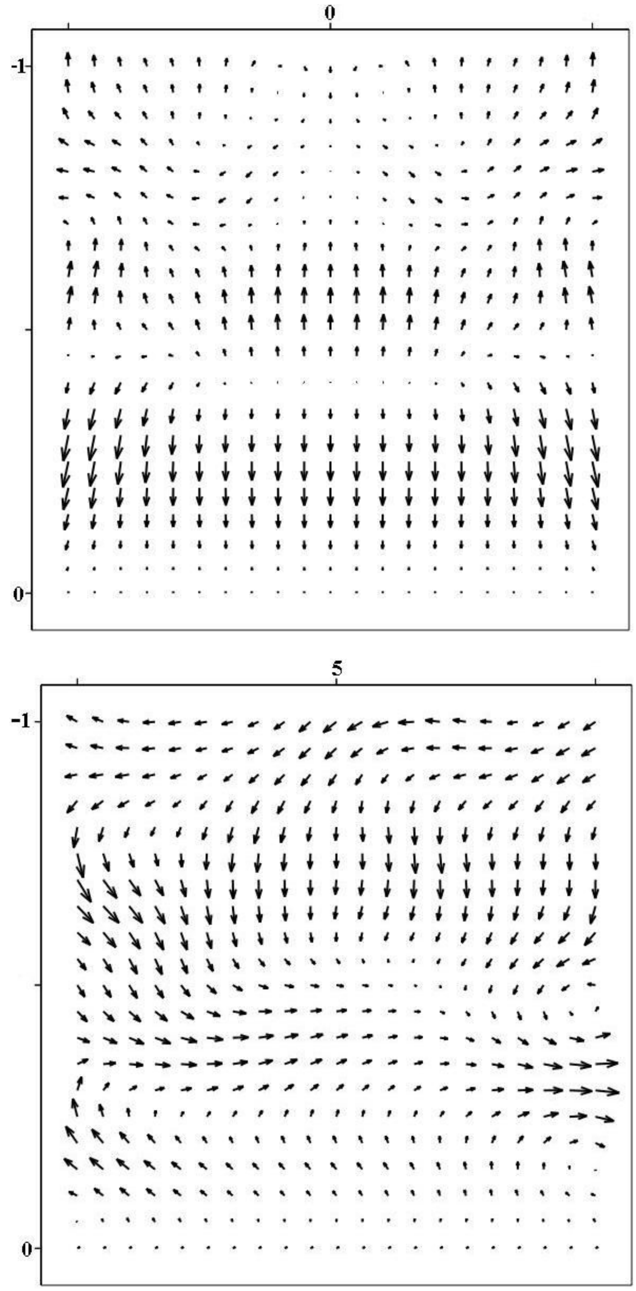
где $\sigma_{33}=\dfrac{c_1^2-2c_2^2}{2(c_1^2-c_2^2)}(\sigma_{11}+\sigma_{22})$, в разные моменты времени.



а) $d_3=0,\ t=6$ б *)* $d_3=5,\ t=7.75$

Рис.2.16. Векторное поле скоростей точек тела D_2

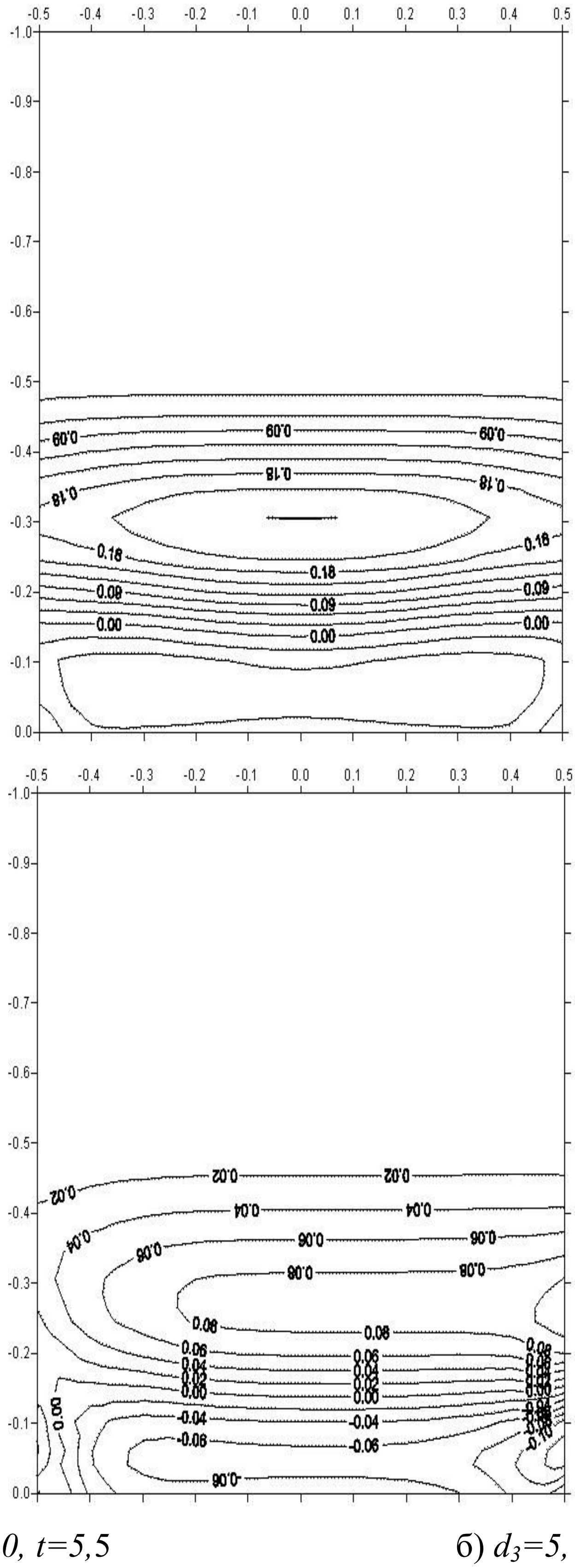
до отражения преломленных волн от верхнего торца.



а) $d_3=0,\ t=7$ б) $d_3=5,\ t=8.75$

Рис.2.17. Векторное поле скоростей в D_2 в момент,
когда преломленные волны отразились от верхнего торца.

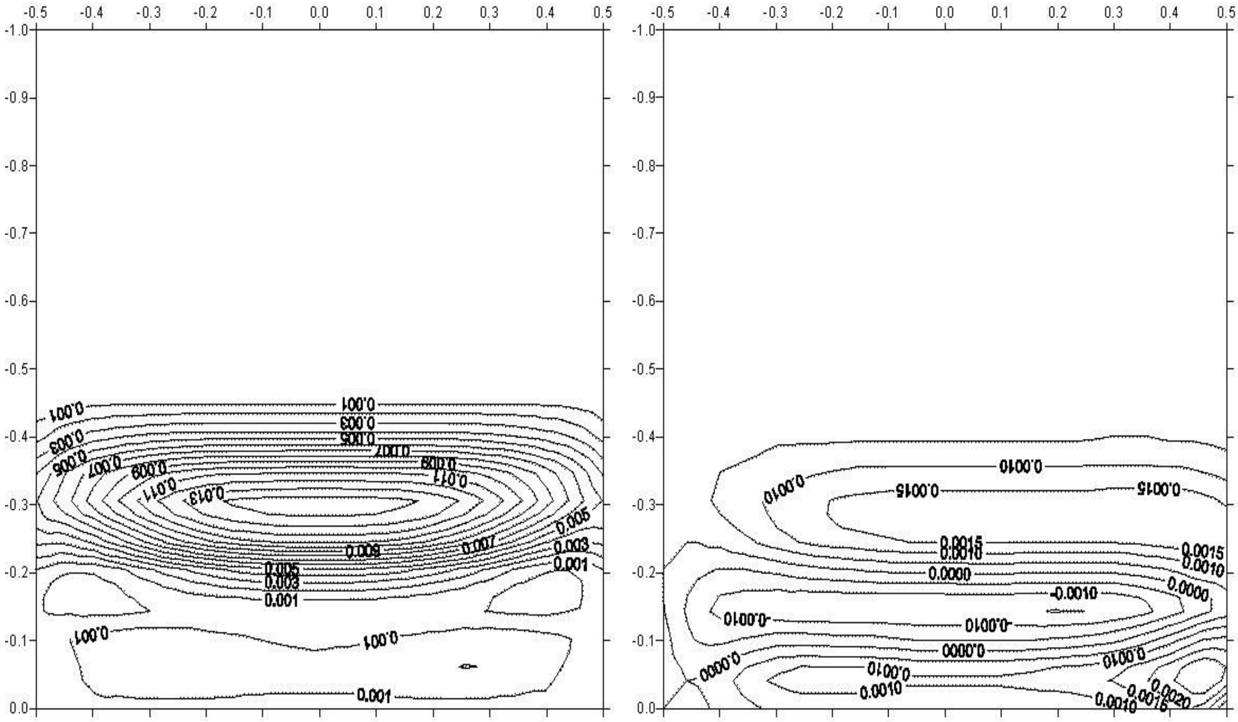
Они характеризуют распределение давления и интенсивности касательных напряжений в исследуемом теле. Эти инварианты также характеризуют объемные и сдвиговые изменения в теле.



а) d_3=0, t=5,5 б) *d_3=5, t=7,25*

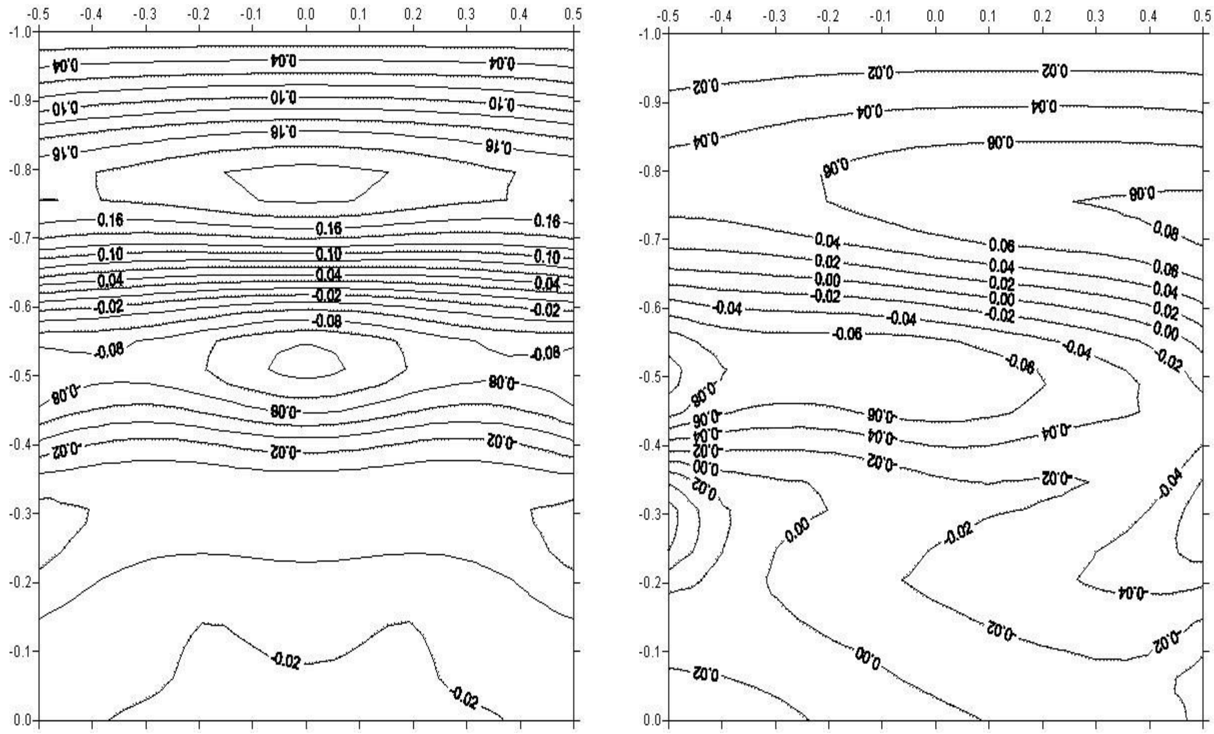
Рис.2.18. Изолинии первого инварианта тензора напряжения в D_2 в момент, когда преломленные волны достигли его середины.

Сравнивая рис.2.18 и 2.19 видим, что тело в эпицентре подвергается обоим изменением схожего характера, причем они симметричны оси x_1, и для тела смещенного от эпицентра характер объемных и сдвиговых изменений схожи, но здесь волна изменении распространяется и от правой боковой стороны. А распределение давления и интенсивности касательных напряжений в первом теле сравнительно больше, чем во втором. Это связано с тем, что распространяющаяся волна возмущений теряет энергию по мере прохождения пути.



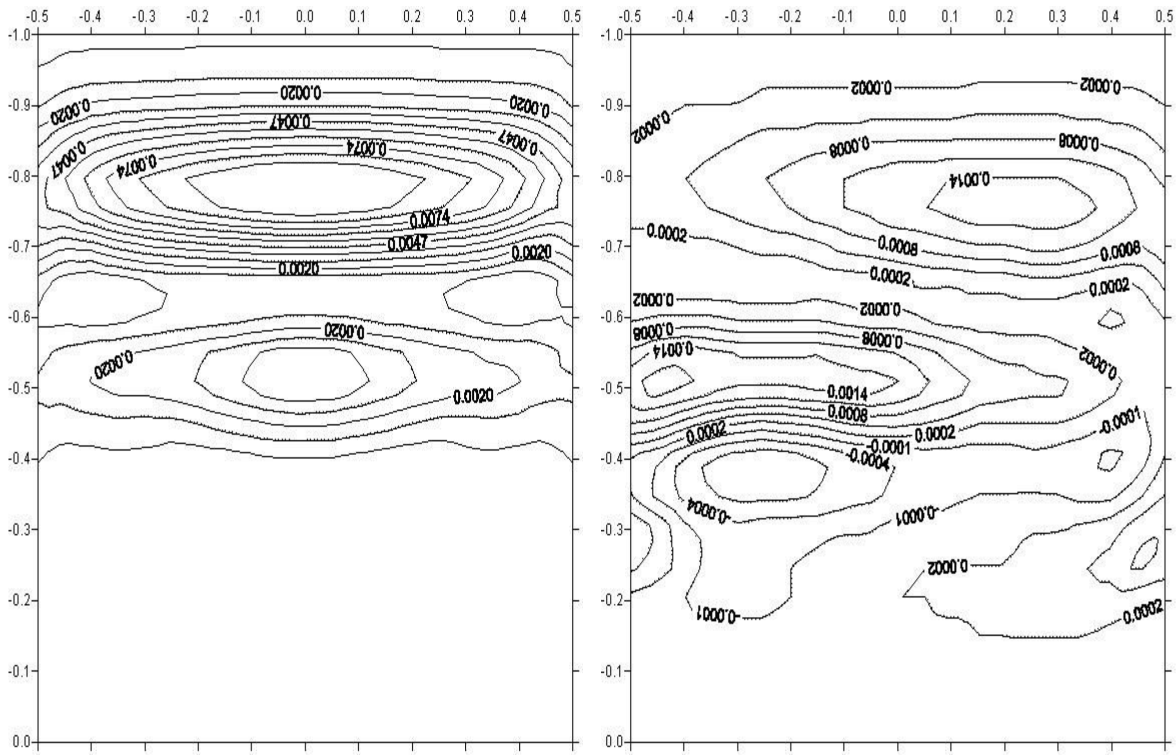
а) d_3=0, t=5.5 б) *d_3=5, t=7.25*

Рис.2.19. Изолинии второго инварианта тензора напряжений в D_2
в момент, когда преломленные волны достигли его середины.



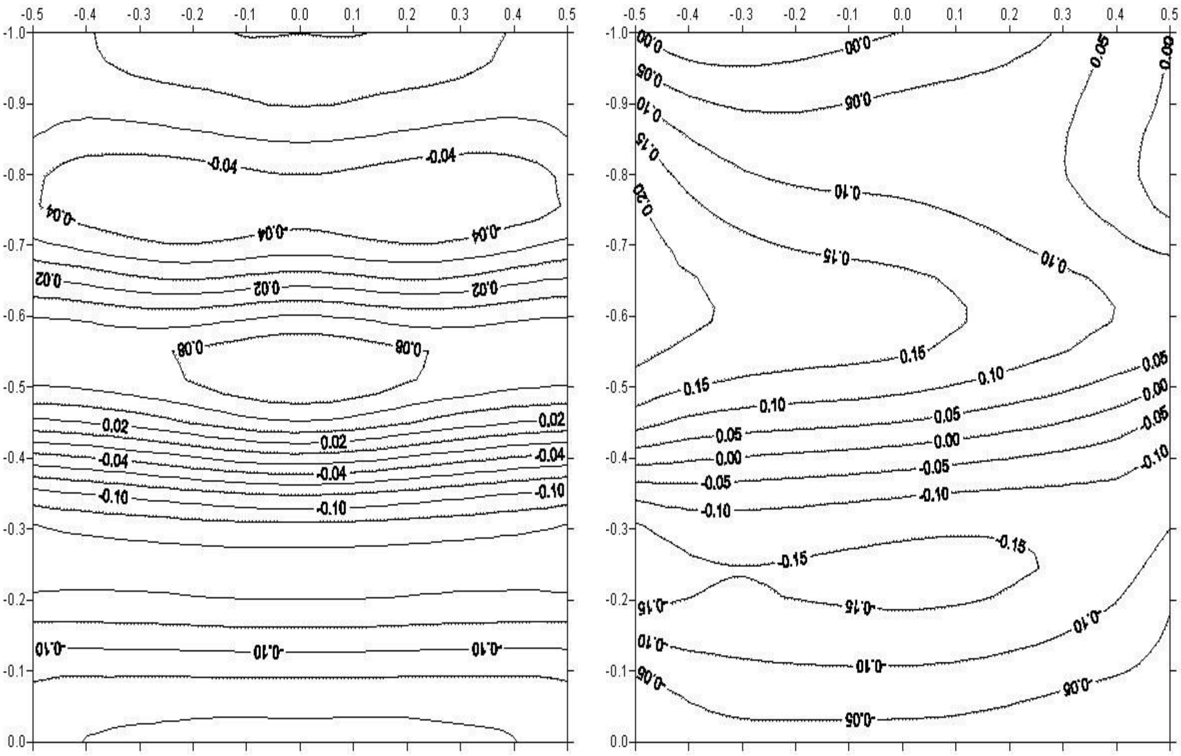
a) d_3=0, t=6 б *) d_3=5, t=7,75*

Рис. 2.20. Изолинии первого инварианта напряжения тела D_2 до отражения преломленных волн от верхнего торца.



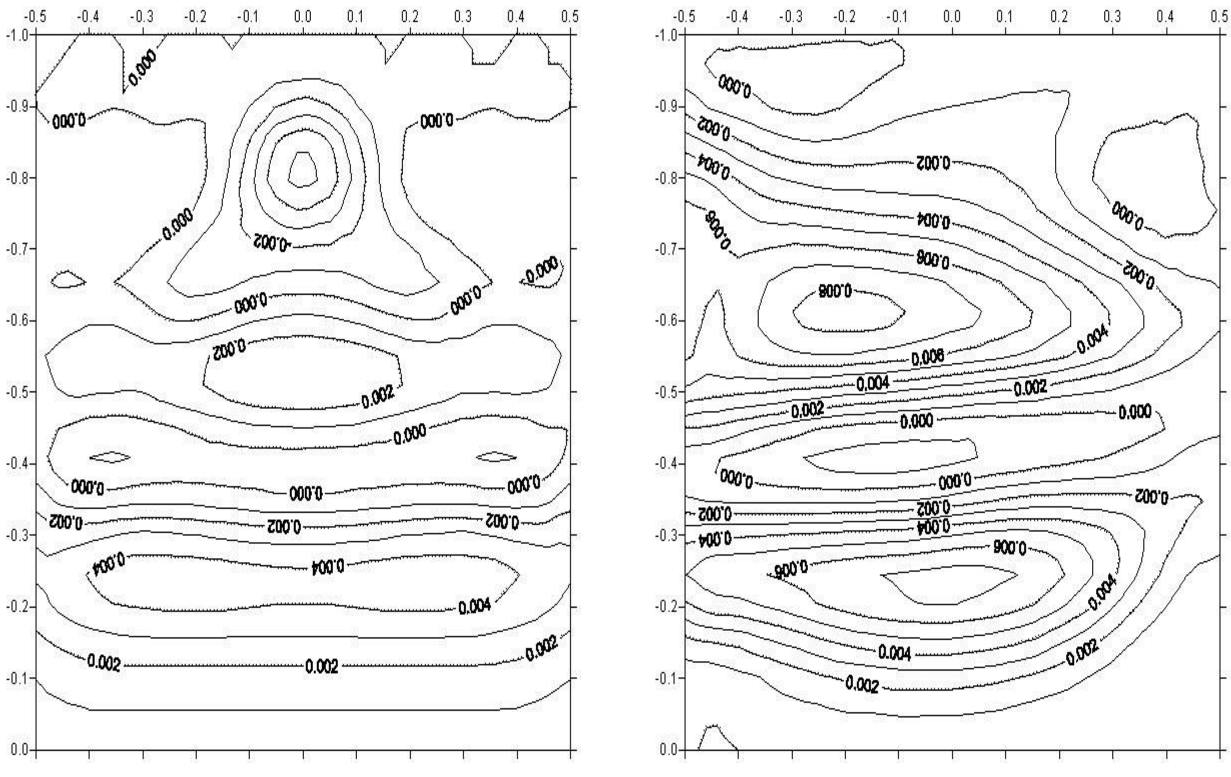
a) d_3=0, t=6 б *) d_3=5, t=7.75*

Рис.2.21. Изолинии второго инварианта тензора напряжений тела D_2 до отражения преломленных волн от верхнего торца.



а) d_3=0, t=7 б) *d_3=5, t=8.75*

Рис.2.22. Изолинии первого инварианта тензора напряжений тела D_2 в момент, когда преломленные волны отразились от верхнего торца



а) d_3=0, t=7 б) *d_3=5, t=8.75*

Рис.2.23. Изолинии второго инварианта тензора напряжений тела D_2 в момент, когда преломленные волны отразились от верхнего торца

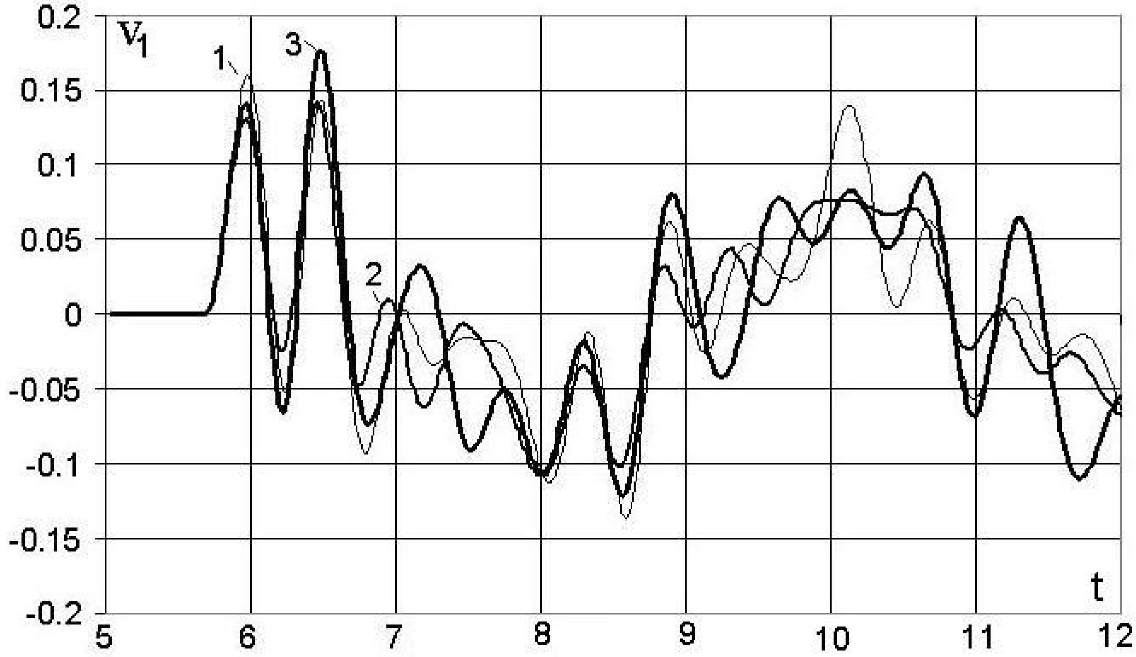


Рис.2.24. Осциллограммы скорости v_1 на глубине x_1=0.25

(1: x_2=-0.5; 2: x_2=-0.25; 3: x_2=0).

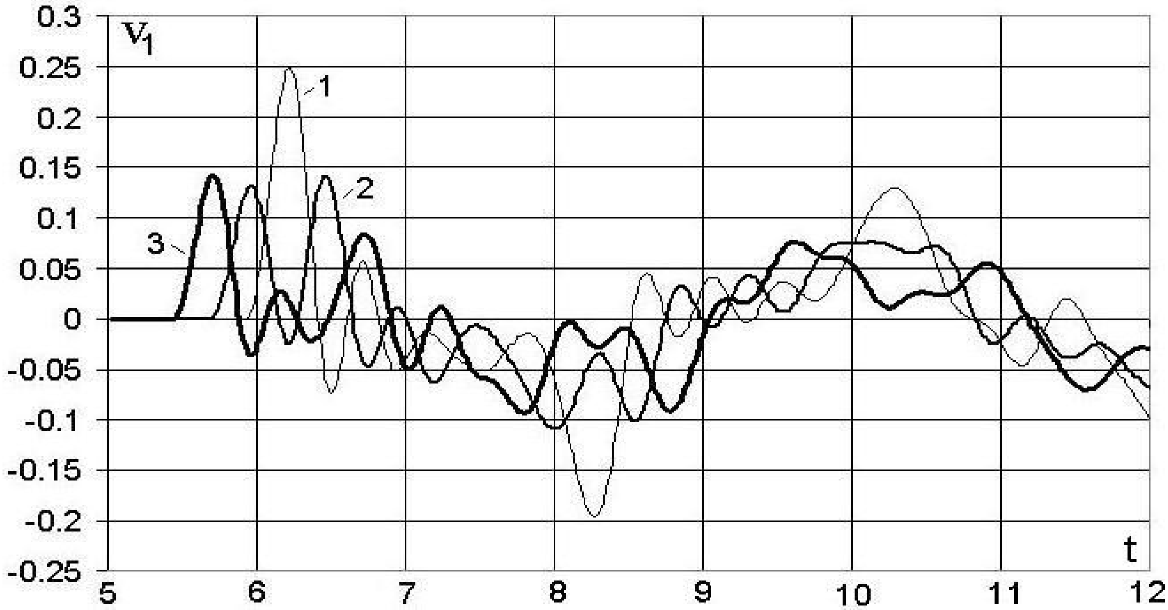


Рис.2.25. Осциллограммы скоростей v_1 при x_2=0,25

(1: x_1=-1; 2: x_1=-0.75; 3: x_1=-0.5).

2.5.2 Дифракция преломленных волн в поверхностном упругом теле при сбросе горизонтальных напряжений на трещине

Скачок напряжений на трещине задается в виде (рис. 1.4)

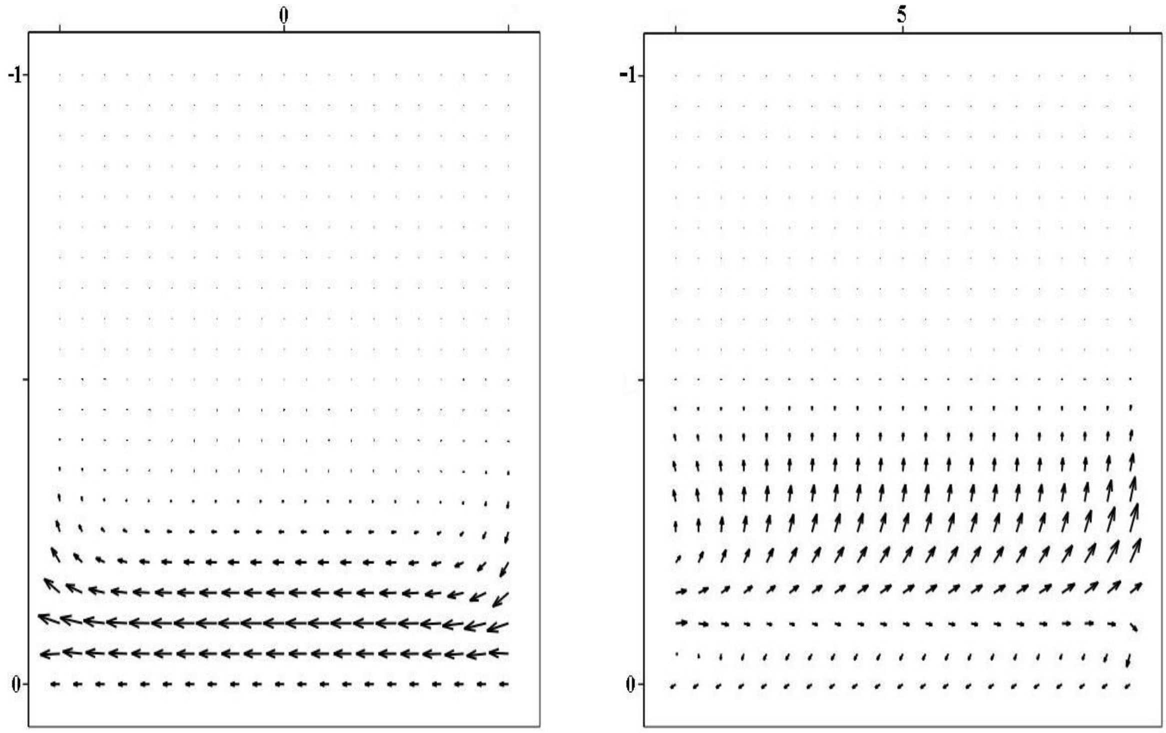
$$P_1(x,t) = 0\,,\ \ P_2(x,t) = 20 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-10t} H(t)\,,$$

и параметр дельтаобразной функции *ε = h=0,05*.

Скорости распространения продольных волн в безразмерных величинах составляют $\mathrm{c}_1^{(1)}$=0,964 и $\mathrm{c}_1^{(2)}$=1 соответственно для первой и второй среды. Отсюда следует, что продольные волны от трещин к точке *O*(0; 0) придут за время t_1=5 соответственно, а в точку *A*(0; 5) за t_2=6,75. Так как динамику полуплоскости мы рассматривали в первой главе, далее дается анализ результатов для поверхностного включения с момента времени t_1=5 для $d_3=0$ (включение стоит на эпицентре) и t_2=6,75 для $d_3=5$ (включение стоит на расстоянии *5* от эпицентра).

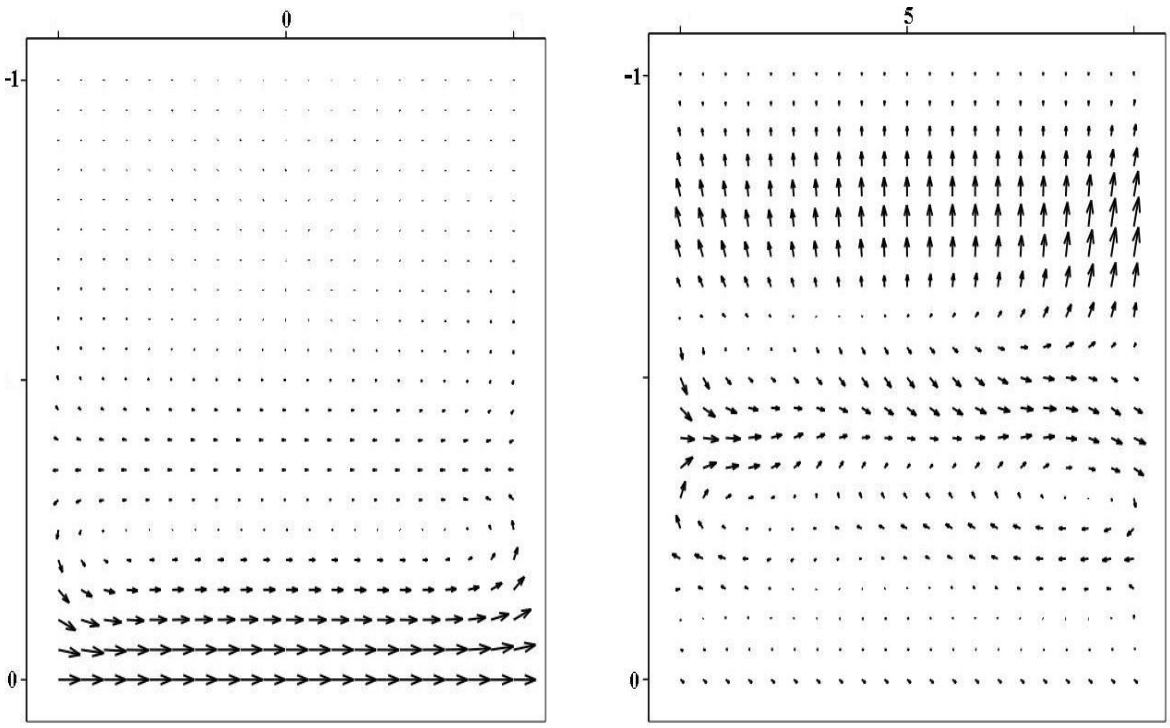
На рис.2.26 представлены векторные поля скоростей точек тела D_2 в момент времени, когда преломленные волны распространилась до середины включения. При $d_3=0$ (рис. 2.26а) распространяется только поперечная волна, и можно заметить эффект взаимодействия с боковой поверхностью. А при $d_3=5$ (рис.2.26б) за продольной волной следует и поперечная волна, что соответствует типу воздействия. Здесь тоже заметен эффект взаимодействия, но сильнее с правой стороной. Это объясняется тем что включение стоит справа от эпицентра.

На рис.2.27 представлены векторные поля скоростей точек тела D_2 в момент времени, когда преломленная волна только добежала до верхнего торца. На рис.2.27а можно заметить, что на переднем фронте поперечные волны потеряли свою первоначальную скорость, а на рис.2.16б можно заметить, что отраженная справой боковой стороны поперечная волна поглощается продольной волной.



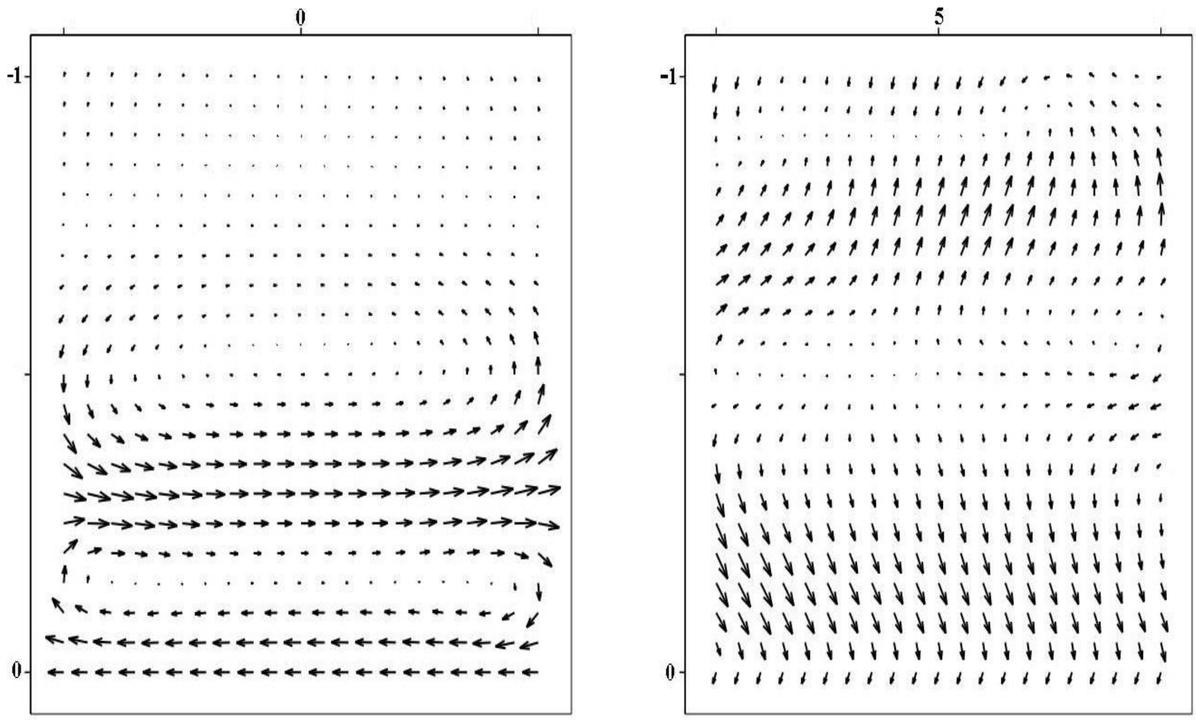
а) d_3=0, t=5,5 б) d_3=5, t=7,25

Рис.2.26. Векторное поле скоростей точек тела D_2 в момент, когда преломленные волны распространилась до его середины.



а) d_3=0, t=6 б) d_3=5, t=7,75

Рис.2.27. Векторное поле скоростей точек тела D_2 до отражения преломленных волн от верхнего торца.

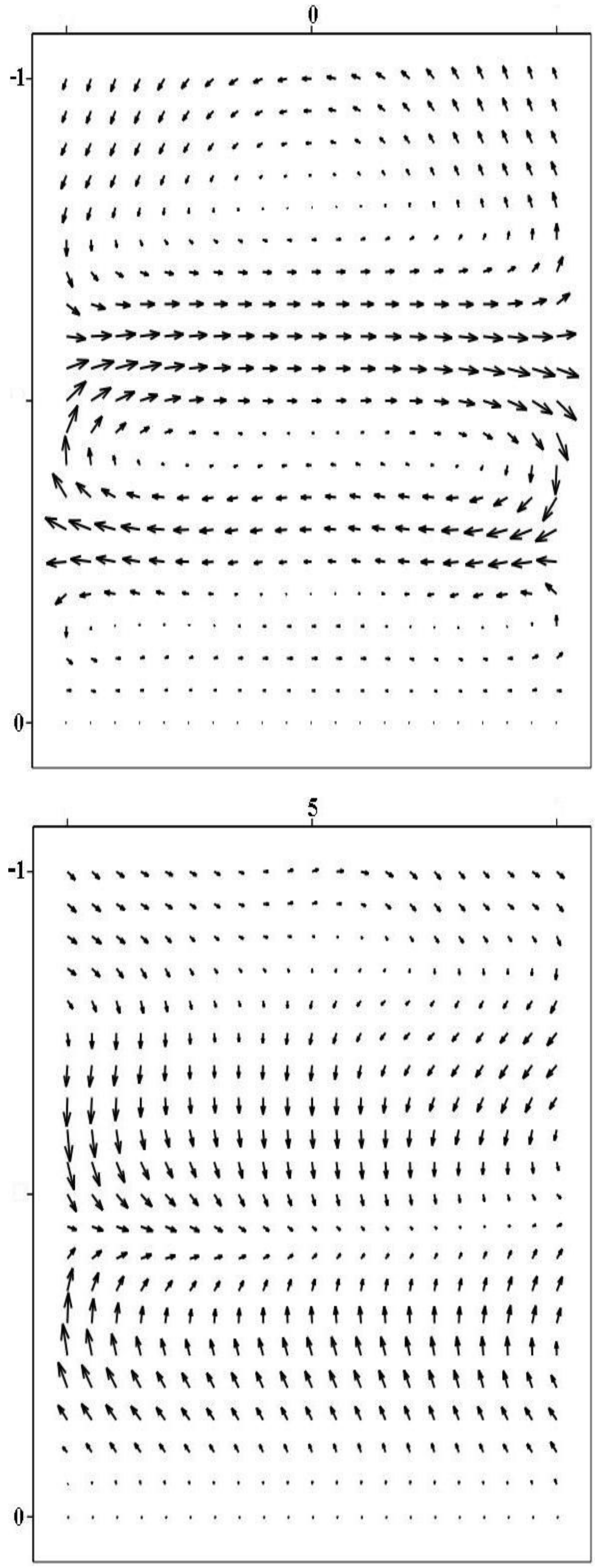


а) $d_3=0$, $t=6,5$ б) $d_3=5$, $t=8,25$

Рис.2.28. Векторное поле скоростей точек тела D_2 в момент, когда преломленные волны начинают отражаться от верхнего торца.

На рис.2.28 представлены векторные поля скоростей точек тела D_2 в момент времени, когда преломленные волны начинают отражаться от верхнего торца. Здесь наблюдается сложная дифракционная картина.

На рис.2.29 представлены векторные поля скоростей точек тела D_2 в момент времени, когда преломленные волны отразились от верхнего торца. Здесь наблюдается сложная дифракционная картина, можно заметить, что верхние угловые точки работают как источники продольной и поперечной волн.



а) d_3=0, t=7 б) d_3=5, t=8,75

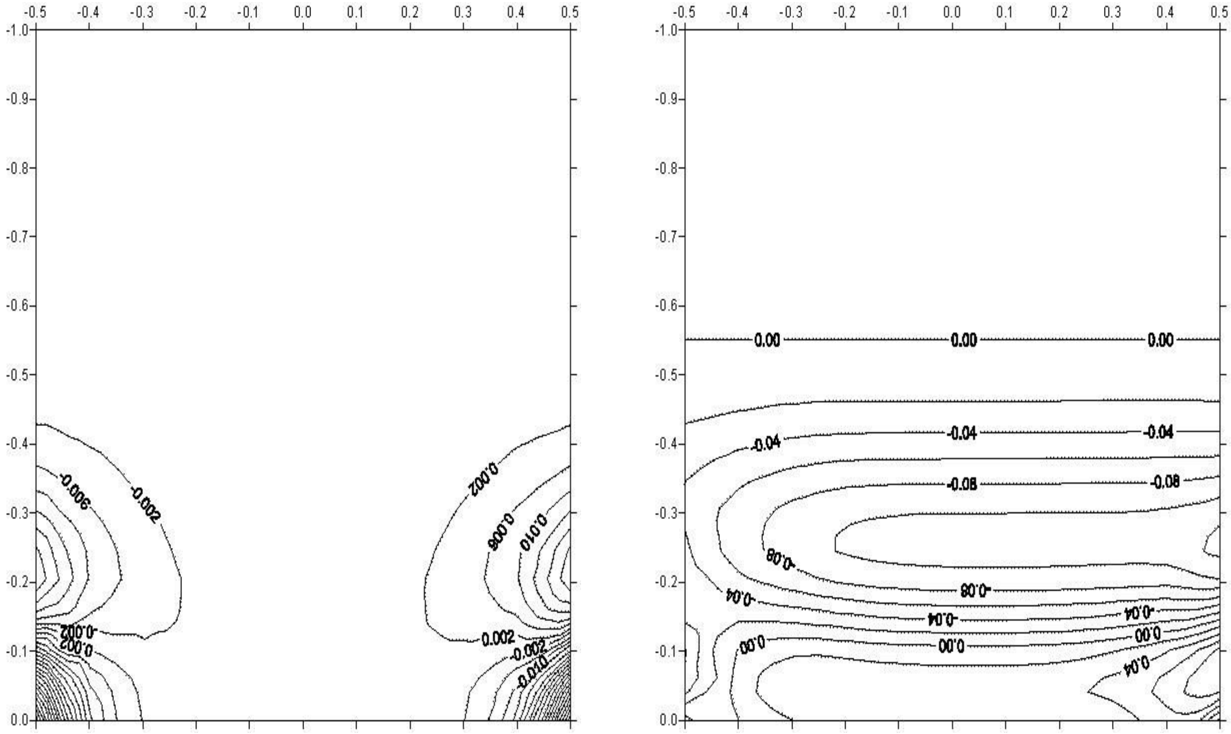
Рис.2.29. Векторное поле скоростей точек тела D_2 в момент, когда преломленные волны отразились от верхнего торца.

На рис.2.30 - 2.35, представлено изолинии первого и второго инвариантов тензора напряжении порождаемое волнами напряженного состояние среды:

$$I_1=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33} \text{ и } I_2=\sigma_{11}\,\sigma_{22}-\sigma_{12}\,\sigma_{12}+\sigma_{33}\,\sigma_{11}+\sigma_{33}\,\sigma_{22},$$

где $\sigma_{33}=\dfrac{c_1^2-2c_2^2}{2(c_1^2-c_2^2)}(\sigma_{11}+\sigma_{22})$, в разные моменты времени. Они характеризуют

распределение давления и интенсивности касательных напряжений в исследуемом теле. Эти инварианты также характеризуют объемные и сдвиговые изменения в теле



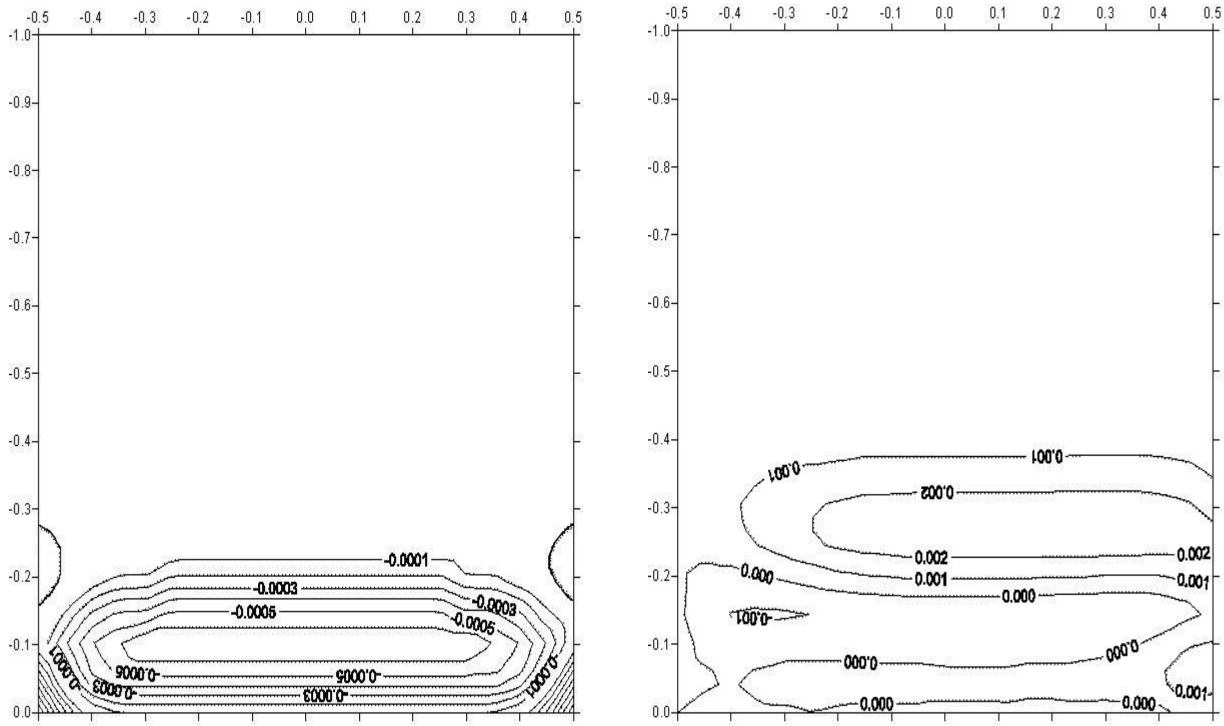
а) d_3=0, t=5,5 б) d_3=5, t=7,25

Рис.2.30. Изолинии первого инварианта напряжения тела D_2 в момент, когда преломленные волны распространились до его середины.

Сравнивая рис. 2.30а и 2.31а видим, что тело в эпицентре подвергается объемным изменениям только с боковых сторон, а сдвиговым изменениям по всему основания, причем они симметричны оси x_1. Это объясняется тем что в тела преломляются в основном сдвиговые волны.

Сравнивая рис.2.30б и 2.31б видим, что тело смещенное от эпицентра подвергается объемным и сдвиговым изменениям схожего характера, но здесь волна изменении распространяется и от правой боковой стороны.

Распределение давления и интенсивности касательных напряжений в первом теле сравнительно меньше, чем во втором. Это связано с тем, что при данном типе воздействии амплитуда продольных волн в эпицентре, близи дневной поверхности, очень мала по сравнению, чем вне эпицентра.

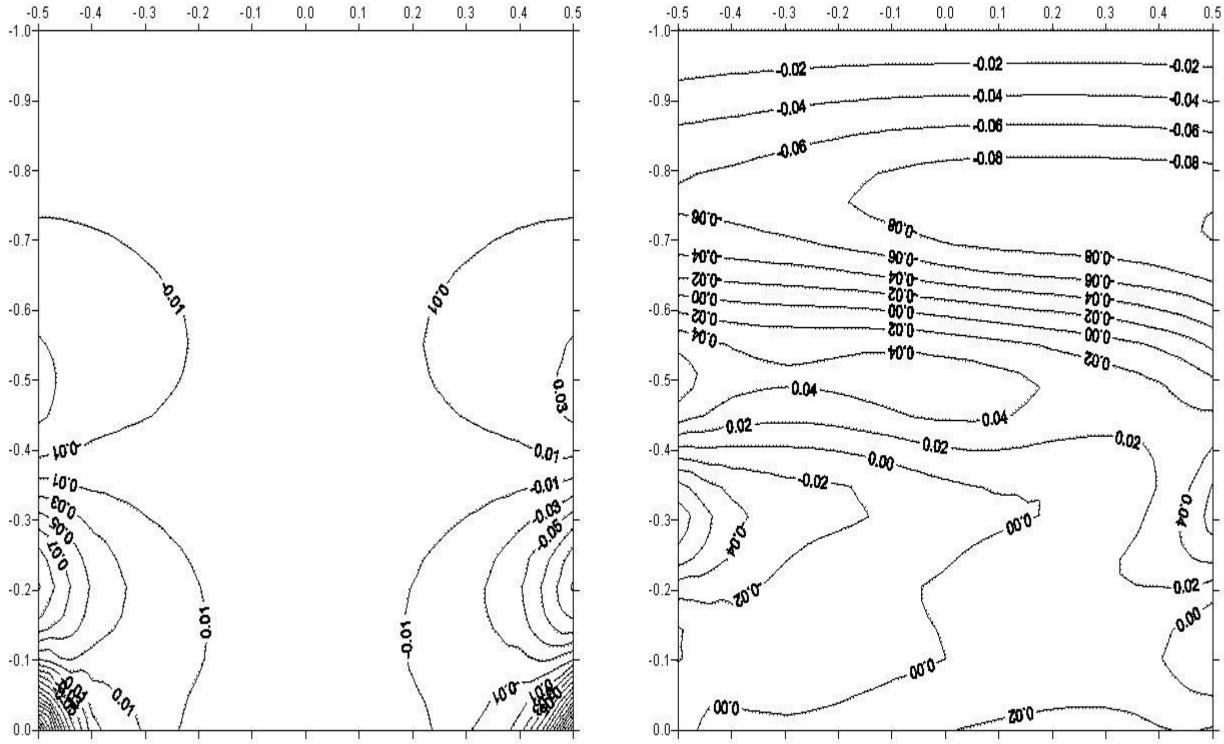


а) d_3=0, t=5,5 б) d_3=5, t=7,25

Рис.2.31. Изолинии второго инварианта напряжения тела D_2 в момент, когда преломленные волны достигли середины.

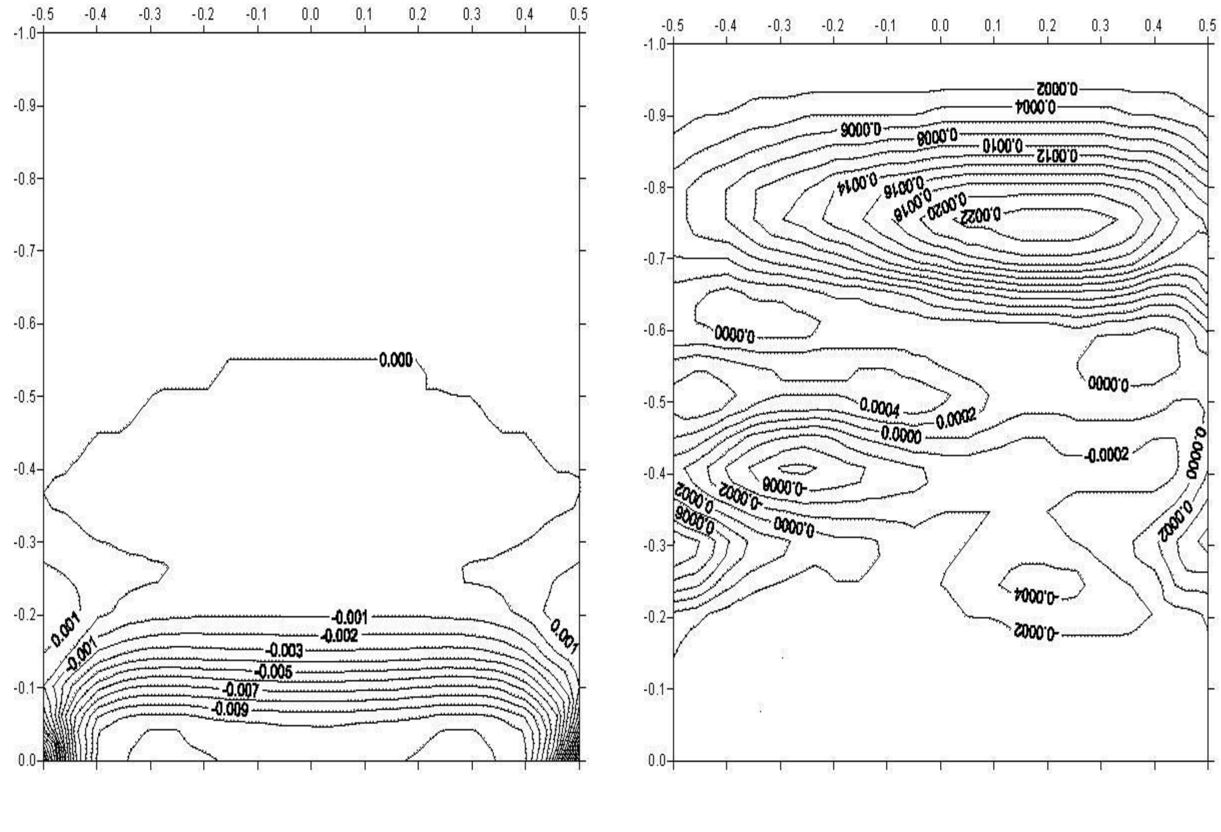
Анализируя рис.2.30 и 2.35 можно прийти к выводу, что при данном типе воздействия разрушению больше подвергается тело расположенное вне эпицентра.

На рис.2.36 показаны, осциллограммы скоростей v_1 и v_2 на глубине $x_1=0,25$ в разных точках x_2, которые в начальные моменты времени значительной степени повторяют форму граничного воздействия с последовательным переходом в нижние слои по координате x_2, но с меньшей амплитудой. Скоростей v_1 и v_2 меняются гармонически, переходя от положительного к отрицательному импульсу и наоборот.



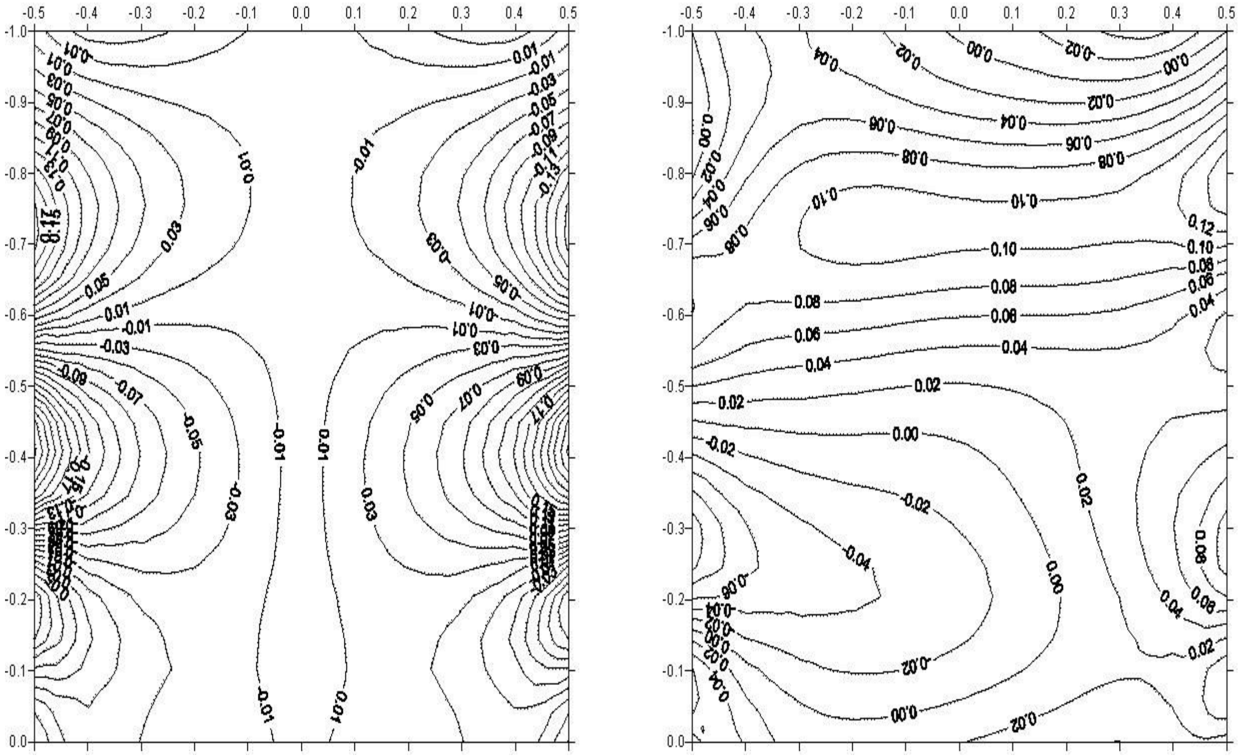
а) d_3=0, t=6 б) d_3=5, t=7,75

Рис.2.32. Изолинии первого инварианта тензора напряжения в теле D_2 до отражения преломленных волн от верхнего торца.



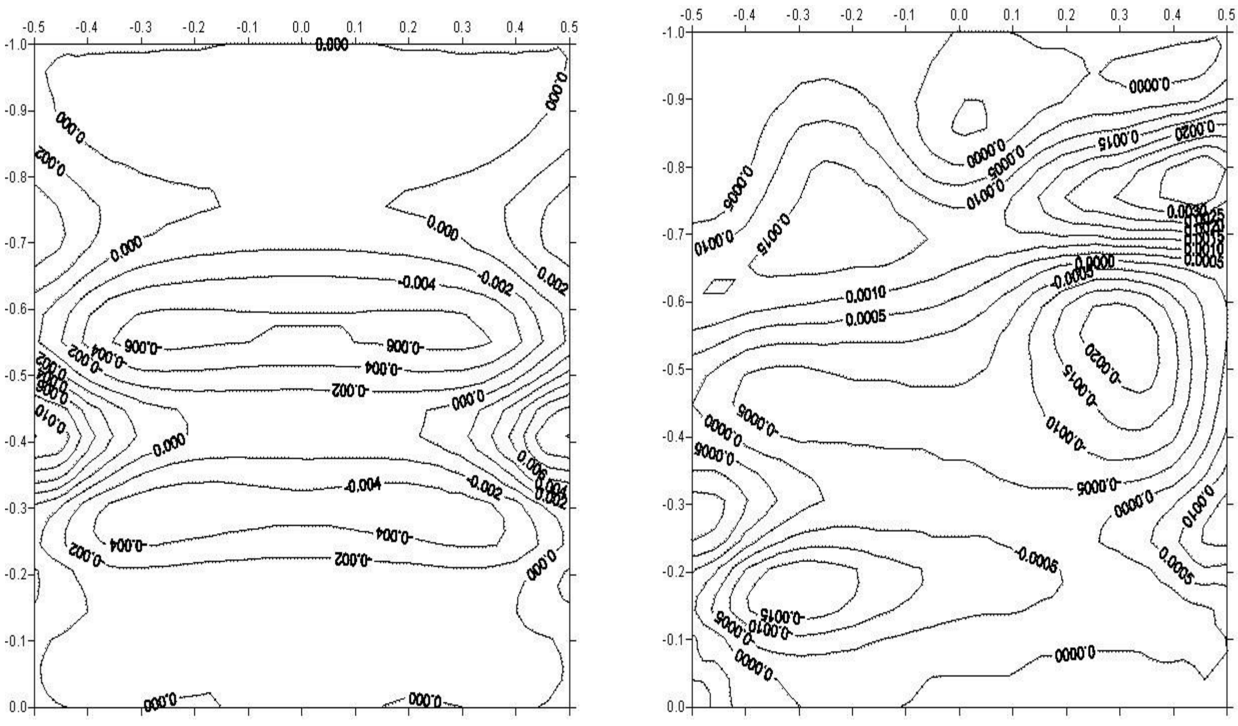
а) d_3=0, t=6 б) d_3=5, t=7,75

Рис. 2.33. Изолинии второго инварианта напряжения тела D_2 до отражения преломленных волн от верхнего торца.



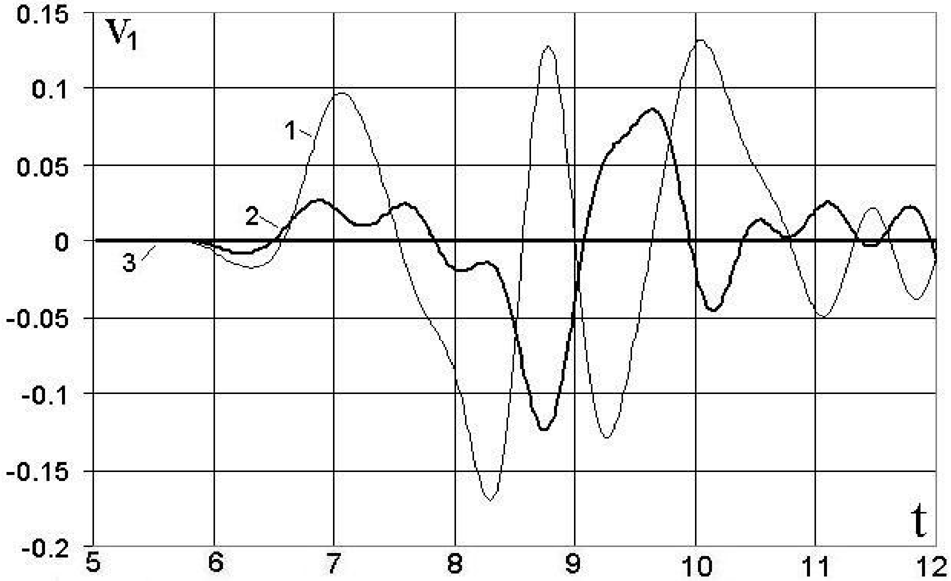
а) d_3=0, t=7 б) d_3=5, t=8,75

Рис.2.34. Изолинии первого инварианта тензора напряжения в D_2 в момент, когда преломленные волны отразились от верхнего торца.

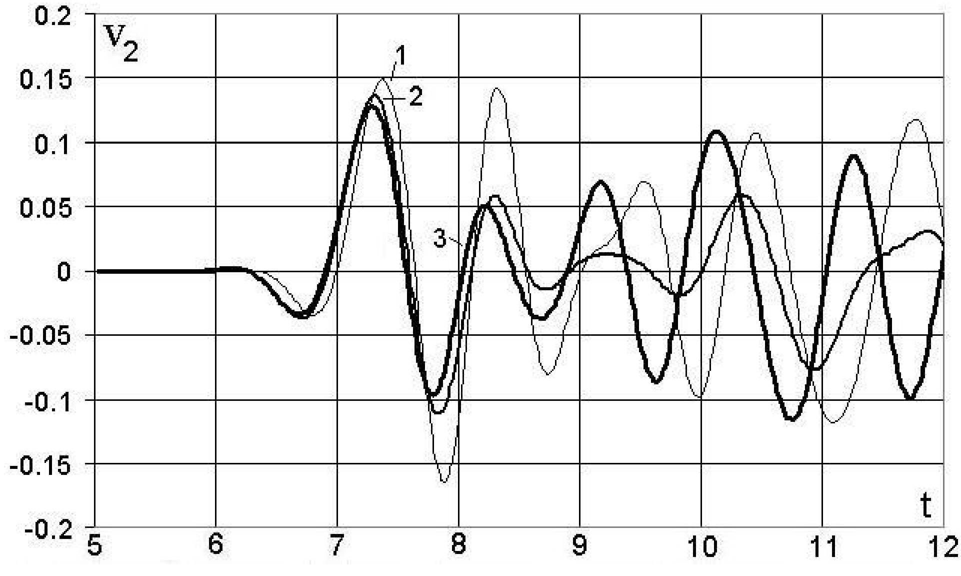


а) d_3=0, t=7 б) d_3=5, t=8.75

Рис.2.35. Изолинии второго инварианта тензора напряжения в теле D_2 в момент, когда преломленные волны отразились от его верхнего торца.



а)

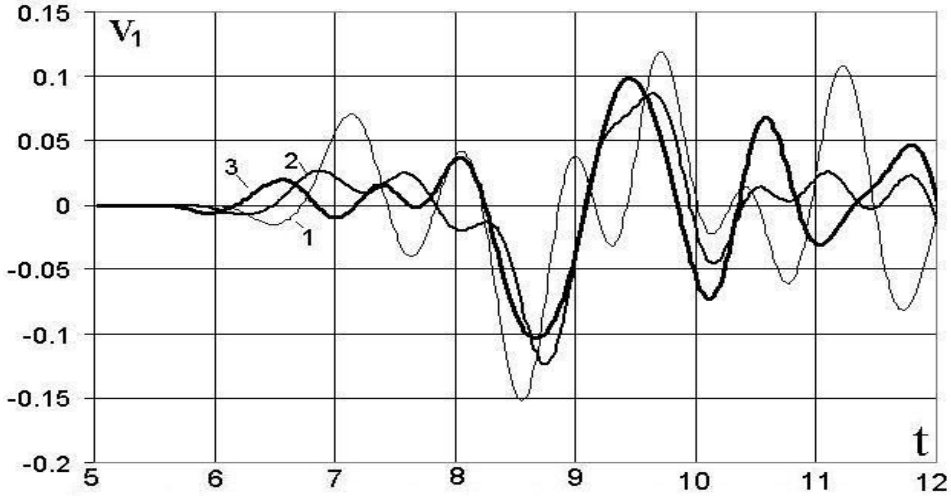


б)

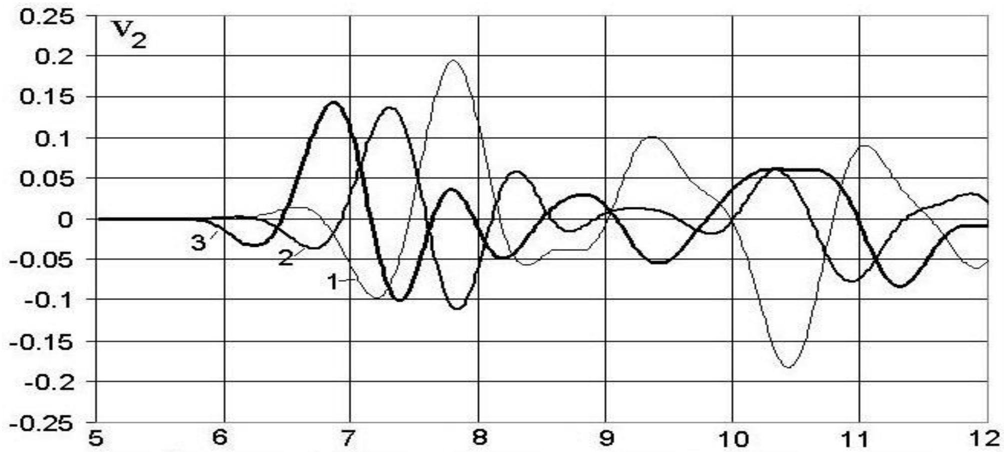
Рис.2.36. Осциллограммы а) скоростей v_1 и б) скоростей v_2 на глубине x_1=0,25 (1: x_2=-0,5; 2; x_2=-0.25; 3: x_2=0).

На рис.2.37 показаны осциллограммы скоростей v_1 и v_2 на глубине $x_2=0.25$ в разных точках x_1, они в начальный момент времени изменяются плавно и четко прослеживается существование продольной и поперечной скоростей.

Поперечная v_2 скорость качественно повторяет форму продольной скорости v_1. Однако, она по амплитуде примерно в три раза меньше, чем продольная скорость.



а)



б)

Рис. 2.37. Осциллограммы а) скоростей v_1 и б) скоростей v_2 при $x_2=0,25$ (1: $x_1=-1$; 2: $x_1=-0,75$; 3: $x_1=-0,5$).

Разработанный пакет прикладных программ позволяет определять компоненты скоростей и тензора напряжений и его инвариантов в любой точке поверхностного тела и подстилающего упругого полупространства, варьировать размеры тела, его расстояние до эпицентра, плотность и параметры Ламе составляющих упругих сред. Также можно менять расположение трещины, ее размеры, глубину залегания и вид функций, определяющий сброс напряжений на трещине как по времени, так и по ее протяженности.

ВЫВОДЫ

Диссертация посвящена математическому моделированию динамического воздействия на наземные сооружения сейсмических волн, распространяющихся в земной коре при образовании глубинных трещин во время землетрясений.

Для этого с использованием моделей и методов механики деформируемого твердого тела были решены следующие задачи:

- разработана математическая модель динамики упругого полупространства при дифракции упругих волн, порожденных сбросом напряжений на горизонтальной трещине в упругом полупространстве
- на базе сочетания метода пространственных характеристик и метода расщепления разработаны алгоритм и пакет компьютерных программ на языке программирования DELPHI для расчета напряженно-деформированного состояния и поля скоростей упругого полупространства и в широком диапазоне нестационарных внешних воздействий в условиях плоской деформации.
- на основе проведенных многовариантных компьютерных экспериментов исследованы напряженно-деформированное состояние и дифракционные картины полей скоростей в упругом полупространстве для разного типа волн, возникающих при сбросе вертикальных, либо горизонтальных напряжений на трещине, моделирующих сейсмические волны в земной коре при образовании трещин отрыва или сдвига
- разработана математическая модель динамики прямоугольного упругого тела на упругом полупространстве в условиях жесткого контактного взаимодействия при дифракции и преломлении упругих волн, порожденных сбросом напряжений на горизонтальной трещине в упругом полупространстве
- на базе сочетания метода пространственных характеристик и метода расщепления разработаны алгоритм и пакет компьютерных программ на языке программирования DELPHI для расчета напряженно-деформированного состояния и поля скоростей поверхностного упругого тела при падении и преломлении упругих волн, порождаемых сбросом напряжений на трещине в упругом полупространстве

- на основе проведенных многовариантных компьютерных экспериментов исследованы напряженно-деформированное состояние и дифракционные картины полей скоростей в поверхностном упругом теле для разного типа волн, возникающих при сбросе вертикальных, либо горизонтальных напряжений на трещине
- определено влияние сейсмического воздействия на состояние упругого тела в зависимости от его расстояния от эпицентра при образовании трещин отрыва или сдвига волн, моделирующего сейсмическое воздействие на наземное сооружение при землетрясениях
- установлено явление концентрации динамических напряжений в окрестности особых точек упругого тела, дана оценка их значений в условиях решенных частных задач. Например, исследована концентрация сжимающих напряжений в окрестности локального удара. Выявлено, что зоны, параллельная и примыкающая к боковым граням приложенного удара, испытывают знакопеременные напряжения, обусловленные сложной картиной волновых процессов. Эти эффекты могут привести к нарушению сплошности тела и к появлению откольных трещин.

Результаты диссертационной работы и разработанные пакеты программ могут найти применение при решении обширного круга задач теории упругости, в механике деформируемого твердого тела, механике горных пород, геофизике и сейсмологии, в механике композиционных материалов, а также в инженерной практике при расчете динамики и прочности наземных сооружений в зонах землетрясений и взрывных работ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Петрашень Г.И.** Основы математической теории распространения упругих волн [Текст]/ Г.И.Петрашень // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. – Ленинград, 1978. -том XVIII, -С. 5-248с.
2. **Новацкий В.** Теория упругости [Текст] / В.Новацкий. – Москва: Мир, 1975. - 872 с.
3. **Гузь А.Н.** Дифракция упругих волн [Текст] / А.Н.Гузь, В.Д.Кубенко, М.А.Черевко. – Киев: Наукова думка, 1978. – 308с.

4. **Ержанов Ж.С.** Динамика тоннелей и подземных трубопроводов [Текст] / Ж.С.Ержанов, Ш.М.Айталиев, Л.А.Алексеева. - Алма-Ата: Наука, 1989. - 240 с.
5. **Партон В.З.** Интегральные уравнения в теории упругости [Текст]/ В.З.Партон, П.И.Перлин. – Москва: Наука, 1977. - 312 с.
6. **Купрадзе В.Д.** Методы потенциала в теории упругости [Текст] / В.Д.Купрадзе. - Москва: Наука, 1963. - 472 с.
7. **Угодчиков А.Г.** Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела [Текст] / А.Г.Угодчиков, Н.М.Хуторянский. - Казань, 1986. - 286 с.
8. **Хуторянский Н.М.** Метод гранично-временных интегральных уравнений в пространственных нестационарных динамических задачах дифракции упругих волн [Текст] / Н.М.Хуторянский //Прикладные проблемы прочности и пластичности. - 1987. -№3. -С.17-23.
9. **Sah J.** Boundary element analysis of linear coupled thermoelasticity problems by using Laplace transformation [Текст] / J.Sah, N.Tasaka //Boundary Elem. Meth. Appl. Mech. Proc 1st Joint Jap., US Symp. Boundary Elem. Meth., - Tokyo, 3-6 Oct, 1988, - P. 335-544
10. **Sharp S.** Boundary integral methods for thermoelasticity problems [Текст] / S.Sharp, S.L.Crouch // Trans. ASME: J. Appl. Mech., - 1986, - Vol.53, 2, - pp.298-302
11. **Fleurier J.** On the use of coupled fundamental solutions in boundary element method for thermoelastic problems[Текст] / J.Fleurier, M.Predeleanu // Eng. Anal., - 1987, - 4, N2, - P.70-74.
12. **Айталиев Ш.М.** Метод граничных интегральных уравнений в задачах динамики упругих многосвязных тел [Текст] / Ш.М.Айталиев, Л.А.Алексеева, Ш.М.Дильдабаев, Н.Б.Жанбырбаев. - Алма-Ата: Наука, 1992. - 228 с
13. **Alexeyeva L.A.** Boundary integral method in two- and three dimensional problems of elastodynamics [Текст] / L.A.Alexeyeva, Sh.A.Dildabaev, G.K.Zakiryanova, N.B.Zhanbyrbaev // Int.J. Computational Mechanics. - 1987. - V.40. №1. - P.1-23.
14. **Alekseyeva L.A.** Boundary Element Method of Boundary Value Problems of Elastodynamics by Stationary Running Loads [Текст] / L.A.Alekseyeva //Int. J. Engineering Analysis with Boundary Element. - 1998. - № 11. - P.37-44.
15. **Alexeyeva L.A.** Boundary Element Method for transient problems of uncoupled thermoelastodynamics [Текст] / L.A.Alexeyeva, A.N.Dadaeva //Boundary Element XIX. Computational Mechanics Publication. - 1997. - P. 118-125.
16. Алексеева Л.А. Граничные интегральные уравнения для упругой полуплоскости с отверстием при динамических нагрузках на его контуре[Текст] / Л.А.Алексеева // Изв. АН КазССР. Сер.физ.-мат. - 1987. - №3. - С.57-62.

17. **Алексеева Л.А.** Метод граничных интегральных уравнений в краевых задачах несвязанной термоэласто-динамики [Текст] / Л.А.Алексеева, А.Н. Дадаева, Н.Б.Жанбырбаев //Прикладная математика и механика. - 1999. - Т.63 Вып.5. - С.853-859.

18. **Алексеева Л.А.** Метод обобщенных функций в краевых задачах связанной термоэластодинамики [Текст] / Л.А.Алексеева, Б.Н.Купесова //Прикладная математика и механика. - 2001. - Т.65 . - №2.С.334-345.

19. **Alexeyeva L.A.** Generalized solutions of boundary value problems of dynamics of anisotropic elastic media [Текст] / L.A.Alexeyeva, G.K.Zakiryanova // Journal of the Mechanical Behaviour of Materials. - 2004. - №5, - P.16-21

20. **Zakiryanova G.K.** Generalized Solutions of Boundary Value Problems for Second Order Hyperbolic Systems [Текст] / G.K.Zakiryanova //Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications –II, Yokohama Publishers, - Japan, 2006. - pp. 409-416.

21. **Бреббиа К.** Методы граничных элементов. [Текст] / К.Бреббиа, Теллес Ж., Л.Броубел – Москва: Наука, 1987. - 528 с.

22. **Бреббиа К.** Применение граничных элементов в технике. [Текст]/ К.Бреббиа, С.Уокер. – Москва: Наука, 1982.-248 с.

23. **Beskos** D.E. Boundary element method in dynamic analyses [Текст] / D.E.Beskos // Appl.mech. rev. - 1987. - V.40. №1. - P.1-23.

24. **Ержанов Ж.С.** Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном породном массиве [Текст] / Ж.С.Ержанов, Ш.М.Айталиев, Ж.К.Масанов. - Алма-Ата:Наука, 1980. – 212с.

25. **Масанов Ж.К.** Определение напряженного состояния тоннелей в транстропном масиве при заданной акселеграмме [Текст] / Ж.К.Масанов, И.Б.Баймаханов // Изв. АН КазССР. Сер.Физ.-мат. - 1986. - №5. - С.80-84.

26. **Масанов Ж.К.** Реакция станции метро в неоднородном грунте на сейсмическое воздействие [Текст]/ Ж.К.Масанов, Н.М.Махметова // Механика подземных сооружениий. – Тула, 1988. - С.18-25

27. **Айталиев Ш.М.** Применение МКЭ для расчета сейсмостойкости подземных сооружений на заданную акселерограмму [Текст] / Ш.М.Айталиев, Ж.К.Масанов, И.Б.Баймаханов // Численные методы оценки устойчивости подземных сооружений. - Алматты, 1988. - С.47 – 50.

28. **Клифтон Р.Дж.** Разностный метод в плоских задачах динамической упругости [Текст] / Р.Дж.Клифтон // Механика (сб. переводов), - Москва, 1968, -№ 1, - С.103-122.

29. **Рекер В.В.** Численные решения трехмерных задач динамической теории упругости [Текст]/ В.В.Рекер // Прикладная механика. Серия Е. - 1970. - №1. - С.121-129.

30. **Годунов С.К.** Численное решение многомерных задач газовой динамики [Текст] / С.К.Годунов, А.В.Забродин, М.Я.Иванов, А.Н.Крайко, Г.П.Прокопов. – Москва: Наука, 1976. - 400 с.

31. **Яненко Н.Н.** Методы дробных шагов решения многомерных задач математической физики [Текст] / Н.Н.Яненко – Новосибирск, 1967. - 195 с.

32. **Тарабрин Г.Т.** Решение методом бихарактеристик нестационарных задач динамики анизотропных оболочек [Текст] / Г.Т.Тарабрин // Строительная механика и расчет сооружений. - Москва, 1980. - № 6, - С. 53 – 58.
33. **Тарабрин Г.Т.** Применение метода бихарактеристик для решения нестационарных задач динамики анизотропных массивов [Текст]/ Г.Т.Тарабрин // Строительная механика и расчет сооружений. –Москва, 1981, –№ 4, –с. 38-43.
34. **Байтелиев Т.Б.** Решение плоской динамической задачи теории упругости для полосы методом пространственных характеристик [Текст] / Т.Б.Байтелиев, Б.М.Мардонов // В кн. Проблемные вопросы механики горных пород. -Алма-Ата,1972. - С. 194-201
35. **Байтелиев Т.Б.** Решение плоской динамической задачи теории упругости методом пространственных характеристик [Текст]: дис. ... д-ра технических наук / Т.Б.Байтелиев. – Туркестан, 1995. - 241с.
36. **Аширбаев Н.К.** Особенности распространения динамических возмущений в телах с неоднородностями [Текст]: дис. ... кандидата физико-математических наук/ Н.К.Аширбаев. - Шымкент, 1986. - 207 с.
37. **Джузбаев С.С.** Контактное взаимодействие упругих тел при нестационарных динамических нагрузках [Текст]: дис. ... кандидата физико – математических наук / С.С.Джузбаев. - Туркестан, 1997. - 134 с.
38. **Веденяпин Е.Н.** Об одном новом методе численного интегрирования уравнений динамики упругих и упруго-пластичных сред [Текст] / Е.Н.Веденяпин, В.Н.Кукуджанов// В сб. вопросов вычислительной и прикладной математики. - Ташкент, 1980. - вып. 60, - С. 32 – 37
39. **Бабешко В.А.** Динамика неоднородных линейно-упругих сред [Текст] / В.А.Бабешко, Е.В.Глушко, Ж.Ф.Зинченко. - Москва: Наука, 1989. - 278с.
40. **Безухов Н.И.** Устойчивость и динамика сооружений [Текст] / Н.И.Безухов, О.В.Лужин, Н.В.Колкунов. – Москва: ВШ, 1987. -248 с.
41. **Бабурченков М.Ф.** Контактное взаимодействие прямоугольной пластинки с осесиметрично подкрепляющимися стержнями [Текст] / М.Ф.Бабурченков, Н.М.Борадачев // Прикладная механика. - Москва, 1979. - т.15, №8, - с. 74-79.
42. **Долматов Б.И.** Механика грунтов, основания и фундаментов [Текст] / Б.И.Долматов. – Ленинград: Стройиздат, 1967. - 228 с..
43. **Галин Л.А.** Контактные задачи теории упругости [Текст] / Л.А.Галин. – Москва: Гостехиздат, 1953. - 264 с.
44. **Римский В.К.** Сравнительная характеристика численных методов решения контактных задач динамической теории упругости [Текст] / В.К.Римский // В сб. Математические методы в механике. - Кишинев, 1980. - вып. 57, - С. 91-97.
45. **Римский В.К.** Численное моделирование динамической задачи об ударе по упругому слою тупым конусом [Текст] / В.К.Римский, П.Ф.Сабодаш // Прикладная механика, - Москва, 1980. - т. 16, №8, - С. 84-92.

46. **Навал И.К.** Динамическое деформирование полупространства, ослабленного цилиндрической полостью переменного радиуса [Текст] / И.К.Навал, Р.А.Чередниченко// В кн. Вычислительные методы механики. – Кишинев, 1981. – вып. 64, – С. 78 - 84.

47. **Алексеева Л.А.** Обобщенное решение уравнений динамики упругой среды с криволинейной трещиной при плоской деформации [Текст] / Л.А.Алексеева, И.Ш.Дильдабаева // Математический журнал, – Алматы, 2007.
– Т7, №2(25), – С. 19 - 31.

48. **Кеч В.** Введение в теорию обобщенных функций с приложением в технике [Текст]/ В.Кеч, П.Теодореску. – Москва: Мир, 1978. - 518 с.

49. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики [Текст] / В.С.Владимиров. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.

50. **Сарсенов Б.Т.** Математическое моделирование и информационная технология в задачах волновой динамики [Текст] / Б.Т.Сарсенов, С.С.Джузбаев // Материалы межд.научно-практ.конф. «Проблемы вычисл. матем. и инфор. технологий». - Алматы, КазНУ, 1999. - С. 168-169.

51. **Сарсенов Б.Т.** Применение новой информационной технологии в задачах волновой динамики [Текст] / Б.Т.Сарсенов, С.С.Джузбаев, К.Б.Амиртаев. // Сборник трудов ППС МКТУ, посв. 1500 летию Туркестана. - Туркестан, МКТУ, 2000. – С. 411-418.

52. **Сарсенов Б.Т.** Исследование динамических волн на полуполосе [Текст] / Б.Т.Сарсенов, С.С.Джузбаев // Вестник МКТУ. – Туркестан, 2001. – №4-5. – С. 200-205.

53. **Сарсенов Б.Т.** Математическая модель задачи волновой динамики [Текст] / Б.Т.Сарсенов, С.С.Джузбаев // Вестник КазНУ, серия мат., мех., инф. -Алматы, 2002. - №4 (32). - С. 249-255.

54. **Сарсенов Б.Т.** Динамическое напряженное состояние полуполосы при боковом импульсном давлении [Текст] / Б.Т.Сарсенов, С.С.Джузбаев// Математический журнал. - Алматы, 2003. - т.3, №1 (7), - С. 55-62.

55. **Сарсенов Б.Т.** Компьютерное моделирование волновых процессов в жестко закрепленном изотропном массиве [Текст] / Б.Т.Сарсенов // Материалы научно-практ.конф. «Проблемы и перспективы внедрения кред.сист.образ. в РК». - Екибастуз, 2005. – С. 392-398.

56. **Сарсенов Б.Т.** Дифракция упругих волн в жестко закрепленном изотропном массива [Текст] / Б.Т.Сарсенов // Поиск, серия естест. и тех. наук. –Алматы, 2005. - №4. – С. 215-219.

57. **Сарсенов Б.Т.** Динамика упругой полуплоскости с поверхностным включением при нестационарном воздействии [Текст] / Б.Т.Сарсенов // III Междунар. науч. конф. молодых ученых «Инновац. развитие и востреб. науки в современном Казахстане», -Алматы, 2009. -С.58-62.

58. **Сарсенов Б.Т.** Динамика упругой полуплоскости при нестационарном воздействии [Текст] / Б.Т.Сарсенов // Матер. Межд. конф. «Теоретические и прикладные проблемы математики, механики и информатики». - Караганда, 2010. – С. 215-217.

59. **Сарсенов Б.Т.** Модель динамики среды в окрестности очага землетрясения [Текст] / Л.А.Алексеева, Б.Т.Сарсенов // Сб. научн. трудов НИА РК. Методы экспериментальной физики. – Алматы. 2010. – С. 63-73.

60. **Сарсенов Б.Т.** Моделирование динамики среды в окрестности очага землетрясения[Текст] / Л.А.Алексеева, Б.Т.Сарсенов// Тезисы докладов Между-народного Джодасбековского симпозиума. – Алматы, 2011. – С. 139-140

61. **Сарсенов Б.Т.** Дифракция упругих волн в полуплоскости с упругим поверхностным включением [Текст] / Л.А.Алексеева, Б.Т.Сарсенов // Тезисы докладов Международной конф. «Современные проблемы прикладной математики, механики», – Новосибирск, 2011. – С. 102-102

62. **Сарсенов Б.Т.** Bicharacteristics method in nonstationary contact problems of the dynamics of elastic media. [Текст] / B.Sarsenov // The 4th congress of the turkic world mathematical society (TWMS), - Baku, Azerbaijan, 1-3 july, 2011. – p. 345-345

63. **Сарсенов Б.Т.** К модели сейсмического воздействия на наземные сооружения [Текст] / Л.А.Алексеева, Б.Т.Сарсенов // Труды межд. науч. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященной памяти акад. М.Я. Леонова (100-летие со дня рождения).– Бишкек, 2012.– С.219-223.

64. **Сарсенов Б.Т.** К моделированию сейсмодинамики наземных сооружений [Текст] / Л.А.Алексеева, Б.Т.Сарсенов // Материалы межд. научно–практической конф. «Проблемы геомеханики и преподавания естественных дисциплин». –Алматы, 2012.–С.198-201.

65. **Сарсенов Б.Т.** Математическое моделирование динамики массива в окрестности очага землетрясения [Текст] / Б.Т.Сарсенов // Труды межд. науч. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященной памяти акад. М.Я. Леонова.– Бишкек, 2012.–С.334-340.

66. **Сарсенов Б.Т.** Дифракция волн в упругой полуплоскости при сбросе напряжений на горизонтальной трещине [Текст] / Л.А.Алексеева, Б.Т.Сарсенов// Журнал эволюции открытых систем. –Алматы. 2012. №1.– С.12-22.

67. **Сарсенов Б.Т.** Дифракция нестационарных волн в упругой полуплоскости с поверхностным включением при сбросе напряжений на трещине [Текст] / Л.А.Алексеева, Б.Т.Сарсенов // Математический журнал.– Алматы. 2012. Т.12, № 2(44). –С.23-42.

68. **Сарсенов Б.Т.** Метод бихарактеристик в контактной задаче волновой динамики [Текст] / Б.Т.Сарсенов // Научный информационный журнал «Материаловедение», Бишкек, 2013, – №2, – стр.101–104

69. **Сарсенов Б.Т.** О динамике наземного сооружения в эпицентре землетресения и вдали от него [Текст] / Т.Б.Дуйшеналиев, Б.Т.Сарсенов // Материалы X межд. науч. конф. «Актуальные проблемы современных наук - 2014». -Премзел (Польша), 2014. -Том 23. - Стр. 48-50.

70. **Сарсенов Б.Т.** Об одной математической модели динамики наземного сооружения [Текст] / Т.Б.Дуйшеналиев, Б.Т.Сарсенов // Уральский

научный вестник. Серия Строительство и архитектура. Физика. Математика. № 24 (103). Урал, 2014. – стр. 55-66

71. **Сарсенов Б.Т.** Моделирование динамики наземного сооружения при землетрясении [Текст] / Т.Б.Дуйшеналиев, Б.Т.Сарсенов // Известия КГТУ им. И.Раззакова, Бишкек, 2014, – №32 (Часть II), – стр.116–120

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пакет программ на языке DELPHI модели динамики наземного сооружения при дифракции и преломлении сейсмических волн

```
unit Unit1;
interface
uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls, Grids, ExtCtrls, Buttons, TeEngine, Series, TeeProcs,
  Chart, TeeFunci, DB, DBTables, DBCtrls, DBGrids;
type
  TFormMine = class(TForm)
    Button1: TButton;
    Button2: TButton;
    Chart1: TChart;
    Series1: TFastLineSeries;
    Series2: TFastLineSeries;
    Series3: TFastLineSeries;
    DataSource1: TDataSource;
    Table1: TTable;
    Button3: TButton;
    Button4: TButton;
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
```

```
    procedure Button2Click(Sender: TObject);
    procedure Button3Click(Sender: TObject);
    procedure Button4Click(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;
  multarr=array of array of Single;
const h=0.05; t=0.025;  e=1;
      a:array [1..2] of word=(3593, 3460 );
      b:array [1..2] of word=(2200, 2000);
      rro:array [1..2] of word=(2500, 2500); //1600
      H1=20; L1=3*H1; L2=4*H1;
      d=2; d1=8; d2=4;  max=1;
      X0:array [1..4] of shortint=(-d1,-d1,-d1,0);
      Y0:array [1..4] of shortint=(-d2,H1-d2,2*H1-d2,-H1) ;
      Lmax:array [1..2,1..2] of byte=((d1,2*d2),(L1,L2));
var
  FormMine: TFormMine;
  s11,s12,s22,v1,v2:array[1..4] of multarr;
  s011,s012,s022,v01,v02:array[1..4] of multarr;
  ro:array [1..4] of real;
  y11:array [1..4] of real;
  y12:array [1..4] of real;
  y33:array [1..4] of real;

implementation
{$R *.dfm}
```

```
function pr_lin(a:multarr; i,j,p,z:shortint):Single;
{Вычисляет линейную производную функции А в точке (i,j)
по переменной p по направлению z(1 вперед, -1 назад, 0 центр)}
var pr:Single;
begin
  if z=0 then pr:=(a[i+(p mod 2),j+(p div 2)]-a[i-(p mod 2),j-(p div 2)])/(2*h)
           else pr:=z*(-3*a[i,j]+4*a[i+z*(p mod 2),j+z*(p div 2)]-
                            a[i+2*z*(p mod 2),j+2*z*(p div 2)])/(2*h);
  pr_lin:=pr;
end;

function pr_sqr(a:multarr; i,j,p,z:shortint):Single;
{Вычисляет квадратную производную функции А в точке (i,j)
по переменной p по направлению z(1 вперед, -1 назад, 0 центр)}
var pr:Single;
begin
  if z=0 then pr:=(a[i+(p mod 2),j+(p div 2)]-2*a[i,j]+a[i-(p mod 2),j-(p div 2)])/sqr(h)
          else pr:=(a[i,j]-2*a[i+z*(p mod 2),j+z*(p div 2)]+
                            a[i+2*z*(p mod 2),j+2*z*(p div 2)])/sqr(h);
  pr_sqr:=pr;
end;

function pr_dis(a:multarr; i,j,z1,z2:shortint):Single;
   {Вычисляет смешанную производную функции А в точке (i,j)
   по направлениям z1 и z2 (1 вперед, -1 назад, 0 центр)}
var pr:Single;
begin
 pr:=0;
 if (z1=0)and(z2=0) then pr:=(a[i+1,j+1]+a[i-1,j-1]-a[i+1,j-1]-a[i-1,j+1])/sqr(2*h);
```

```
 if (z1=0)and(z2<>0)then pr:=z2*(4*a[i+1,j+z2]-a[i+1,j+2*z2]-3*a[i+1,j]-
                              4*a[i-1,j+z2]+a[i-1,j+2*z2]+3*a[i-1,j])/sqr(2*h);
 if (z1<>0)and(z2=0)then pr:=z1*(4*a[i+z1,j+1]-a[i+2*z1,j+1]-3*a[i,j+1]-
                              4*a[i+z1,j-1]+a[i+2*z1,j-1]+3*a[i,j-1])/sqr(2*h);
 if (z1<>0)and(z2<>0)then pr:=z1*z2*(a[i+z1,j+z2]+a[i+2*z1,j+2*z2]-
                                     a[i+z1,j+2*z2]-a[i+2*z1,j+z2])/sqr(h);
  pr_dis:=pr;
end;

procedure TFormMine.Button1Click(Sender: TObject);
begin
close
end;

procedure TFormMine.Button2Click(Sender: TObject);
var
   z1,z2,z,k: shortint;
   time,i,j:word;
   s11_1,s22_2,s12_2,s21_1,v1_1,v2_2,v1_2,v2_1,tmp, F1,F2:Single;
   s011_1,s022_2,s012_2,s021_1,v01_1,v02_2,v01_2,v02_1:Single;
   f:array[1..4] of textfile;

function istok(i,j,k:word):Single;
var
ist12:Single;  zp:byte;   w:real;
begin
zp:=1;  ist12:=0;    w:=20;
     case zp of
       1: ist12:=20/(2*e*h)*t*k*exp(-10*t*k);
       2: ist12:=1/(2*e*h)*sin(w*t*k)*exp(-10*t*k);
```

```
     end;
istok:=ist12;
end;
begin
   z:=1;
 for k:=1 to 4 do
   begin
     ro[k]:=rro[k  div 4 +1]/rro[max];
     y11[k]:=ro[k]*sqr(a[k div 4 +1]/a[max]);
     y12[k]:=ro[k]*sqr(b[k div 4 +1]/a[max]);
     y33[k]:=y11[k]-2*y12[k];
   end;
 for i:=1 to 4 do
   begin
    assignfile(f[i],'350blok'+inttostr(i)+'.txt');
     rewrite(f[i]);
    writeln(f[i],'  t      i      j      s11      s12      s22      v1       v2');
     SetLength(s11[i],Lmax[i div 4 +1,1]+1);
     SetLength(s12[i],Lmax[i div 4 +1,1]+1);
     SetLength(s22[i],Lmax[i div 4 +1,1]+1);
     SetLength(v1[i],Lmax[i div 4 +1,1]+1);
     SetLength(v2[i],Lmax[i div 4 +1,1]+1);
     SetLength(s011[i],Lmax[i div 4 +1,1]+1);
     SetLength(s012[i],Lmax[i div 4 +1,1]+1);
     SetLength(s022[i],Lmax[i div 4 +1,1]+1);
     SetLength(v01[i],Lmax[i div 4 +1,1]+1);
     SetLength(v02[i],Lmax[i div 4 +1,1]+1);
     for j:=0 to Lmax[i div 4 +1,1] do
       begin
         SetLength(s11[i,j],Lmax[i div 4 +1,2]+1);
```

```
          SetLength(s12[i,j],Lmax[i div 4 +1,2]+1);
          SetLength(s22[i,j],Lmax[i div 4 +1,2]+1);
          SetLength(v1[i,j],Lmax[i div 4 +1,2]+1);
          SetLength(v2[i,j],Lmax[i div 4 +1,2]+1);
          SetLength(s011[i,j],Lmax[i div 4 +1,2]+1);
          SetLength(s012[i,j],Lmax[i div 4 +1,2]+1);
          SetLength(s022[i,j],Lmax[i div 4 +1,2]+1);
          SetLength(v01[i,j],Lmax[i div 4 +1,2]+1);
          SetLength(v02[i,j],Lmax[i div 4 +1,2]+1);
        end;
   end;
  for k:=1 to 4 do
   for i:=0 to Lmax[k div 4 +1,1] do
     for j:=0 to Lmax[k div 4 +1,2] do
       begin
          s11[k,i,j]:=0;
          s12[k,i,j]:=0;
          s22[k,i,j]:=0;
          v1[k,i,j]:=0;
          v2[k,i,j]:=0;
       end;
for time:=1 to 350 do
   begin
     for k:=1 to 4 do
       for i:=0 to Lmax[k div 4 +1,1] do
         for j:=0 to Lmax[k div 4 +1,2] do
           begin
             s011[k,i,j]:=s11[k,i,j];
             s012[k,i,j]:=s12[k,i,j];
             s022[k,i,j]:=s22[k,i,j];
```

```
          v01[k,i,j]:=v1[k,i,j];
          v02[k,i,j]:=v2[k,i,j];
         end;
   for k:=1 to 4 do
     for i:=(k div 4)*(H1-round(a[2]/a[1]*time/2)) to (k div 4)*(H1+round(a[2]/a[1]*time/2)){Lmax[k div 4 +1,1] - (k div 4)} do
       for j:=(k div 4)*(H1-round(a[2]/a[1]*time/2)-d) to (k div 4)*(H1+round(a[2]/a[1]*time/2)+d) do
         begin
          if (i=0)or(i=Lmax[k div 4 +1,1]) then z1:=1-2*(i div Lmax[k div 4 +1,1]) else z1:=0;
          if (j=0)or(j=Lmax[k div 4 +1,2]) then z2:=1-2*(j div Lmax[k div 4 +1,2]) else z2:=0;
          s011_1:=pr_lin(s011[k],i,j,1,z1);
          s012_2:=pr_lin(s012[k],i,j,2,z2);
          s022_2:=pr_lin(s022[k],i,j,2,z2);
          s021_1:=pr_lin(s012[k],i,j,1,z1);
          v01_1:=pr_lin(v01[k],i,j,1,z1);
          v02_2:=pr_lin(v02[k],i,j,2,z2);
          v01_2:=pr_lin(v01[k],i,j,2,z2);
          v02_1:=pr_lin(v02[k],i,j,1,z1);
          F1:=0;  F2:=0;
if k=4 then
       case z of
      1: if (abs(i - H1)<=e)and(abs(j - H1)<= d) then F1:=istok(i,j,time-1);
      2: if (abs(i - H1)<=e)and(abs(j - H1)<= d) then F2:=istok(i,j,time-1);
         end;
```

```
s11_1:=s011_1+t*(y11[k]*pr_sqr(v01[k],i,j,1,z1)+y33[k]*pr_dis(v02[k],i,j,z1,z2))
- abs(i - H1)/2*F1;
          s12_2:=s012_2+t*y12[k]*(pr_sqr(v01[k],i,j,2,z2)+pr_dis(v02[k],i,j,z1,z2))
- (abs(j - H1) div d)/2*F1;

s22_2:=s022_2+t*(y11[k]*pr_sqr(v02[k],i,j,2,z2)+y33[k]*pr_dis(v01[k],i,j,z1,z2))
- (abs(j - H1) div d)/2*F2;
          s21_1:=s021_1+t*y12[k]*(pr_sqr(v02[k],i,j,1,z1)+pr_dis(v01[k],i,j,z1,z2))
- abs(i - H1)/2*F2;

          v1_1:=v01_1+t/ro[k]*(pr_sqr(s011[k],i,j,1,z1)+pr_dis(s012[k],i,j,z1,z2)) -
(i - H1)/2/sqrt(ro[k]*y11[k])*F1;
          v2_2:=v02_2+t/ro[k]*(pr_sqr(s022[k],i,j,2,z2)+pr_dis(s012[k],i,j,z1,z2)) -
((j - H1) div d)/2/sqrt(ro[k]*y11[k])*F2;

          v1_2:=v01_2+t/ro[k]*(pr_sqr(s012[k],i,j,2,z2)+pr_dis(s011[k],i,j,z1,z2)) -
((j - H1) div d)/2/sqrt(ro[k]*y12[k])*F1;
          v2_1:=v02_1+t/ro[k]*(pr_sqr(s012[k],i,j,1,z1)+pr_dis(s022[k],i,j,z1,z2)) -
(i - H1)/2/sqrt(ro[k]*y12[k])*F2;

         if (i=0)and(((abs(j-H1)> d2)and(abs(j-2*H1)> d2)and(abs(j-3*H1)>
d2))or(k<>4)) then
             if z2<>0 then
               begin
                s11_1:=s11_1+sqrt(ro[k]*y11[k])*(v1_1+v01_1);
                v1_1:=-v01_1; v2_1:=-v02_1; s21_1:=0;
                 end
                 else begin   tmp:=v1_1;
             v1_1:=-(y33[k]*(v2_2+v02_2))/y11[k]-v01_1;
```

```
            s11_1:=s11_1+sqrt(ro[k]*y11[k])*(tmp-v1_1);
            tmp:=v2_1;     v2_1:=-v1_2-v01_2-v02_1;
            s21_1:=s21_1+sqrt(ro[k]*y12[k])*(tmp-v2_1);
              end;
          if z2<>0 then
            if i=0 then
             begin
              s22_2:=s22_2+z2*sqrt(ro[k]*y11[k])*(v2_2+v02_2);
              v2_2:=-v02_2; v1_2:=-v01_2; s12_2:=0;
             end
              else   begin tmp:=v2_2;
            v2_2:=-y33[k]*(v1_1+v01_1)/y11[k]-v02_2;
            s22_2:=s22_2+z2*sqrt(ro[k]*y11[k])*(tmp-v2_2);
            tmp:=v1_2;     v1_2:=-v2_1-v01_2-v02_1;
            s12_2:=s12_2+z2*sqrt(ro[k]*y12[k])*(tmp-v1_2);
                  end;
if k=4 then
     case z of
    1: if (abs(i - H1)<=e)and(abs(j - H1)<= d) then F1:=F1+istok(i,j,time);
    2: if (abs(i - H1)<=e)and(abs(j - H1)<= d) then F2:=F2+istok(i,j,time);
      end;
       v1[k,i,j]:=v01[k,i,j]+t*(s011_1+s012_2+s11_1+s12_2+F1)/(2*ro[k]);
       v2[k,i,j]:=v02[k,i,j]+t*(s022_2+s021_1+s22_2+s21_1+F2)/(2*ro[k]);
       s11[k,i,j]:=s011[k,i,j]+t*(y11[k]*(v01_1+v1_1)+y33[k]*(v02_2+v2_2))/2;
       s12[k,i,j]:=s012[k,i,j]+t*y12[k]*(v01_2+v02_1+v1_2+v2_1)/2;
       s22[k,i,j]:=s022[k,i,j]+t*(y11[k]*(v02_2+v2_2)+y33[k]*(v01_1+v1_1))/2;
  end;
  for k:=1 to 3 do
   for j:=0 to 2*d2 do
    begin
```

```
        v1[k,d1,j]:=(v1[k,d1,j]+v1[4,0,k*H1-d2+j])/2;
        v2[k,d1,j]:=(v2[k,d1,j]+v2[4,0,k*H1-d2+j])/2;
        s11[k,d1,j]:=(s11[k,d1,j]+s11[4,0,k*H1-d2+j])/2;
        if j mod (2*d2) <> 0 then
          s12[k,d1,j]:=(s12[k,d1,j]+s12[4,0,k*H1-d2+j])/2;
        v1[4,0,k*H1-d2+j]:=v1[k,d1,j];
        v2[4,0,k*H1-d2+j]:=v2[k,d1,j];
        s11[4,0,k*H1-d2+j]:=s11[k,d1,j];
        s12[4,0,k*H1-d2+j]:=s12[k,d1,j];
      end;
    if time = 350 then
     for k:=1 to 4 do
        for i:=0 to Lmax[k div 4+1,1] do
          for j:=0 to Lmax[k div 4+1,2] do
writeln(f[k],time:5, i:5, j:5,
  s11[k,i,j]:9:4, s12[k,i,j]:9:4, s22[k,i,j]:9:4, v1[k,i,j]:9:4, v2[k,i,j]:9:4);
 end;
 for k:=1 to 4 do
    CloseFile(f[k]);
end;


end.
```