

789:;<= <> ?77?@A8? BCDCE F

+ * " 1(),012(), .2(), =72*49

A > A() -'()*+, >A(+,/+ 0 12()),

/ % \$ %&(),#0 % " 1 (B8C0 D E < >2()),(1

233)4 56F# 3GC(), H,

1(), 0 12(), + % \$ %&(),0 % " =72*49 7 3 8 09 3'

HIJK?CLCM),

N 3 4 # , : O

8&) >2() =72*49*

N 3 0 3 3 3 4 4 P; & < Q R = 0 > % % 2

D4

D4

(+ * 9 S T G 8 1 8 C % *

@2 0 U A : 23) 34 D' () * , D

! 7" V3 @ W* E ? 1; 4 Q ' / X A - # (V W *

/ D C 0, W GKLL

/ 2 X MD # A - #

Y4

ABC4D, 6

H M # N M O P Q

% % % % 0 3 " @ * E V 27 "@ % 3 . F 3 G H - W # (- #

! 2# 3 0 2 3 , < 3 2 + E

/ % " & % % Z(Q > (M()), [V 2* " "

+ # 1 \$ 1 2 &), 0 % " ' / % (

/ % ' J 2 [V] 2 & %

N 3 0 2 3 K G \ & 3]C)M, 0 + N M R I O M \ M E 1 8 & ;

B# aC

! " _G(H, 0 < X[b

! 7 * \$ % I & (X f , # 0 P O , [N 3 ' (4 P ^ , c

). B CDB C B CDB C ED FD BFGDH FI J D K L

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ

Омуралиев А.С., Алыбек кызы Эльвира
 Кыргызско-Турецкий университет «Манас», Бишкек, Кыргызская Республика
asan.omuraliev@mail.ru, alybekovaelvira@gmail.com

REGULARIZATION OF SINGULAR PERTURBED OPTIMAL CONTROL PROBLEMS OF PARABOLIC EQUATIONS

Omuraliev A.S., Alybek kyzy Elvira
 Kyrgyz-Turkish University "Manas", Bishkek, Kyrgyz Republic
asan.omuraliev@mail.ru, alybekovaelvira@gmail.com

В статье строится регуляризованная асимптотика решения управляемого процесса, описываемого дифференциальным управлением параболического типа с малым параметром при пространственной производной, когда распределенное управление входит в управление объекта.

В работе [1] была построена асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления параболическим уравнением, когда управления входило в граничное условия. Данная статья является продолжением работы [1] в смысле обобщения метода на задачу, когда распределенное управление входит в управление объекта.

Существование решение задачи (1)-(2) при достаточно малых ε следует из работы [2].

2. Постановка задачи

Рассмотрим управляемый процесс описываемый уравнением

$$L_\varepsilon u(x, t, \varepsilon) \equiv u_t - \varepsilon^2 a(x) u_{xx} - b(x, t)u - p(x, t, \varepsilon) = f(x, t), (x, t) \in \Omega, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u(x, 0, \varepsilon) = 0, u_x(0, t, \varepsilon) = 0, u_x(1, t, \varepsilon) + \alpha u_x(1, t, \varepsilon) = 0, \tag{2}$$

где $\alpha = const > 0$, $\Omega = (0 < t \leq T) \times (0 < x < 1)$, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Будем говорить, что выполнено условия А, если $b(x, t)$, $f(x, t) \in C^\infty(\Omega)$, $\forall x \in [0,1]$, $0 < a(x) \in C^\infty[0,1]$, $p(x, t, \varepsilon)$ – управляющая функция из $L_2(\Omega)$.

Требуется найти допустимое управление $p^0(x, t, \varepsilon)$ и соответствующее ему решение $u^0(x, t, \varepsilon)$ задачи (1),(2), чтобы функционал

$$I = \int_0^1 [u(x, T, \varepsilon) - \Phi(x)]^2 dx + \beta \int_0^1 \int_0^T p^2(x, t, \varepsilon) dt dx, \quad \beta = const > 0$$

принимал наименьшее возможное значение при $p(x, t, \varepsilon) = p^0(x, t, \varepsilon)$, $u(x, t, \varepsilon) = u^0(x, t, \varepsilon)$. Здесь $\Phi(x)$ заданная функция из $L_2(0,1)$.

Следя методике работы [3] (см. также [1]), поставленную задачу оптимального управления можно свести нахождению $u(x, t, \varepsilon)$ из задачи (1)-(2) и

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(x, t, \varepsilon) + \varepsilon^2 \partial_x^2 (a(x) \psi(x, t, \varepsilon)) + b(x) \psi(x, t, \varepsilon) &= 0, \quad \partial_x (a(x) \psi)|_{x=0} = 0, \\ [\partial_x (a(x) \psi(x, t, \varepsilon)) + \alpha a(x) \psi(x, t, \varepsilon)]|_{x=1} &= 0, \quad \psi(x, T, \varepsilon) = -2[u(x, T, \varepsilon) - \Phi(x)], \end{aligned} \tag{3}$$

где функция $p(x, t, \varepsilon) = \frac{1}{2\beta} \psi(x, t, \varepsilon)$, $\psi(x, t, \varepsilon) \in W_2^{0,1}(\bar{\Omega})$

3. Решение задач (1)-(3)

3.1. Регуляризация задач

Следя методу регуляризации для сингулярно возмущенных задач [4], введем регуляризующие переменные

$$\xi = \frac{\varphi_l(x)}{\varepsilon} \equiv \frac{(-1)^{l-1}}{\varepsilon} \int_{l-1}^x \frac{ds}{\sqrt{a(s)}}, \quad l = 1, 2.$$

И место искомым функции $u(x, t, \varepsilon)$ и $y(x, t, \varepsilon) \equiv a(x) \psi(x, t, \varepsilon)$, введем в рассмотрение расширенные функции $\tilde{u}(x, t, \xi, \varepsilon)$, $\tilde{y}(x, t, \xi, \varepsilon)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ такие что, сужение посредством регуляризующих функций, совпадают с искомыми функциями $u(x, t, \varepsilon)$, $y(x, t, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(M, \varepsilon)|_{\xi=\varphi(x,\varepsilon)} &\equiv u(x, t, \varepsilon), \quad \varphi(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} (\varphi_1(x), \varphi_2(x)), \\ \tilde{y}(M, \varepsilon)|_{\xi=\varphi(x,\varepsilon)} &\equiv y(x, t, \varepsilon), \quad M = (x, t, \xi), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \end{aligned} \tag{5}$$

На основании (4), из тождеств (5) найдем производные по t и x . Тогда с учетом (1), (2), (3), (5) для расширенных функций $\tilde{u}(x, t, \xi, \varepsilon)$ и $\tilde{y}(x, t, \xi, \varepsilon)$ естественно поставить задачу:

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u}(M, \varepsilon) \equiv D \tilde{u} - \varepsilon L_\xi \tilde{u} - \varepsilon^2 L_x \tilde{u} - \tilde{p}(M, \varepsilon) = f(x, t), \quad (x, t, \xi) \in Q,$$

789:;<= <> ?77?@A8? BCDCE F

0 . % (\$ & . '
! S 1
IPc OI d WZsc M (e lsc M) e. lrc N e' lrc(i li Q rc • % lrc
%oo
N , - d rc & lrc % f Y • % lrc Q IS • Q „ O

PQQr d % % Q r [5 s 1 l) Q - ISk
u... ^ . _ u - 7

pt 4 FGI M ‡ c l - W M C [c l . . h @ t e h , # ' ' % _ E
kg M C ‡ c N I ‡ S e M I M B ‡ c I S • „ N C I S l e l „ Y O

0 % % % '
! w œ Q < ; . . / * i
& % (% % " 0 * \$ % %
* \$ \$ % ' % k % % %
% 1 % %

h 5 4 0 uc 6 d 5 6 0 [l + c \$ i 5 m _ • % o m ,
N D * Q lrc 6 L I S r c • % lrc N • W L I S r c Š u Q lrc N
œ œ
N , ' < l . Q r c & l r c † „ g Y • % l r c M C E 8 @ c M # C H s I œ

@ O Q M W K g M C ‡ c l l . N I Q % • g ... A c • C
F I M ‡ c l 3

g ™ 4 0 € G B : ; ... l M ‡ c l C - v K v) • n „ g #
' I S e c O n l € c N q q W Ž C I l N †) Š
-6 -6 0 u [r - 6
)
C I M C ‡ c l I S l e † „ g N ... @ ... X ~ c N C ‡ l l „ l

5 l) • c , f x f % o o - , f - % o o , x 0 # † 2 s - 2 5 ... , O ... - O [
s t m - 6 1 7 \ d M ‡ c l C M i g M F ‡ c S e „ g M † I S l e l „ l

b 7 7 7 % ? % % ((k J b 1

Z

B

!z ! y}} \ _ z }} \ !z
!z

X \$ H J C m n
\$ \$V 2+A)3>6*O(&\&P[&(8)A #

q
% (% ' 8 " 7 * % % (" (@
% ! " % 7@
\$ \$ & (U'] % & (S
\$ \$ & (h'd' /7 (" " @ (S
= % % % (" % * S
(% \$ ' g ((% (% * S
" @ % (% % \$ \$
"! % ')

) 8<~9`<9 ...<ZA:@A™? :™9Z9>9``|>< >A>9`;?>< <`9Z~<<

" (" % @ 7 ' > % % *
% (% % " 7 7 % % (% *
" (" (^ _ ' h% 7 & (* % % (% *
(" @ _ "(7 @ 7@ (& (% % ' % *
" 7 & " | % 7 % (% (% *
\$ \$ & (% (% (% ^#_
' % (% % " % *
& % (% % (% U']

A)

• A) , ^U 6()Q9TG†0 -

A) , 7{()0e), 9 6 € e

` () , * { () , * 6 () , & * √ (* | * 0 % Y
& % % z (* z z < | 0 (Y
H* * x
S \$ \$ & ()
CDF DC ED o H G J BDp J .)

$$t = 0: \quad p(0) = \dots, \quad q(0) = q_0, \quad r(0) = r_0, \tag{11}$$

... (text describing the context of the equations)

$$p(0) = 0, \quad q(0) = 0, \quad r(0) = 0 \tag{12}$$

... (text describing the context of the equations)

$$Mx = -A \cdot 3p, \quad \dots \tag{14}$$

... (text describing the context of the equations)

... (text describing the context of the equations)

$$* ju(t)rq^{-1} ki(t) + \dots \tag{14}$$

$$r = r, \quad c(0) \sim \dots$$

... (text describing the context of the equations)

$$C(i) - A(i) = p(t), \quad \dots$$

... (text describing the context of the equations)

$$P > (\dots) \tag{15}$$

'5(

@ d r

... (text describing the context of the equations)

d

OMFs In n M O M = (, f D G (, /) [" < T q v K w E W S q " R = (" , E " , (" v

f / c ` () , P E " , /) c) M H (" z f " , f

EP4 D = (, • 5 E J N 4 (EP4 (CP N (EPM R a P y \ P x x R (, () 8 P 4 , E E P M , (E , *

P C M (E P M , P f / c ` () , % , C M - (| % " , ((M P M ((M P M D , x x R C a \ 2 (R a / (E P M) c) 0) M P M # # , _ (E P M , *

E E P M , E ` (E P M ,

I () , < 0 \$ % & + % ' 8 " @ E

0 = c P 0 0 0 0 z { S 2 i R | / T (q D < D C u & , /) n <

N c i d u c u n d u c M c i d u n / c ` () , E " , /]

= (" 4 E E , 9 c (5 (E M (E P C c () , P C u () , , /) D 0 8 m

` J , 6 (' 2 ' E E ,

\$ D

(I < E , D E % , & P & P o d w f ... Q Q \ 2 k - \ 2 P | I a R a Q \ 2 8 R a P

, " (E E " 4 # \$, n (E P 4 , < (E P M , P , C 8 (% M P 8 , f O I - \ 2 P # P , * # # P , /] •) 0) 1

789:;<= <> ?77?@A8? BCDCE F

') &\$& (4,9 } S,
% \$& ' &\$ (&\$ % \$&

r5

t •

-- - 0 \$ %& w p R# e
! #)

] 0]2⁴
HM08 , y-, | T

" D
(D < D nd
' b V V J U P C M () * , C c e) M , P C u e) M , f / c ` () ,
m l # e ` M) * , /) c

P * , , Q H x 5 # j 5 # * 5 # Q
5 # 5 # e 5 # Š C

M > l c B s B f 0 I

L s , s U

, ¢ N , & S , " c) 8 P 4 \$ u " 6 , 0 : , G K y , - K
u + 2 R (P 5 \ 2 (R a P

3 i , - 0 c (*
, E I x N E N E I x N E N g " , E ' \$ + (\$
& \$ & H g " , 3 G g 3 , g " , 3

_ (C P M , 7 Y G C P M W I ! !

g " , 3 \$, - , 9 c

J % (% % (% % 7 @

% ! .

.i C D F D C E D o H G J B D p J

789:;<= <> ?77?@A8? BCDCE F

7 7 8 9 : # / ` () 9 ,)
t /) /)

i 0 #) ' 3 l %
)) GA:@<9 ;9™ GA8|9 8AG`| 8 ?;>A:œ9Z9 :™ 9Z9>9``|>< @A•œœ<~<9`

% (% *\$\$ &
\$ ' g ((% (% *\$\$ &
"@ % (% %
q % (((7 (%
% (((% ((% (\$ % ' (|
+ \$\$ & 7

/) /f /.
q %

s(.*) , 0 3* e , 3+Mq,(;|V+e:), #

S \$\$ & (^2_
/† ^ (/ (Gc(., 5h\|u(q1 P,,)
/. ' /.
/† ^ (/3G* (., <_:(Gc(.,

^ , 0 % *\$\$ & < "l % s 7 . *) 0, H f= bn
k V 0 \$ (q

. 0 2* r 0 } m, } M q ? (+)(:), *
. 0 J* s 0 } u, + \$ M q œ (),

k

(]Me2, 0 } 4*)4/c
3]M(J, 0 } u* 3Gc(J, 0 } E

+ %) \$ % & 7 H V
"@)

H 1 S 1 1 S
3]M (., 0 yP #.z,. CPM, 3]M M-f.CB m<m /././<3G(x8 , (< P4,V

x x x /././.
1>R8P 1. 1. a t X P 5 e S N P O 1 O 1 O 1 R 5 S N P O 1 R 5 S N P R (i

.O CDF DC ED o H GJ BDp J

3]M V %4 K C, CP (. C (< . C... < _G:(. CP8CP8T

T /. : , R ' E
S Q .IRc
% *\$\$ & ^ (, \$ H %& %

- . , O / 'oP4 (. • TM (. < . C , < TM (. f . CPM , D I †c

(,< \$ %& w ' + &
8" @ (% % *\$\$ & " + &

Q !" (" % C(., σ *2& % % *\$\$ & 0
.IV2
QE 2, t:. |ŠT3'` (. t* C 2x &< % Y
% H ' % % H 7' b
(% %
1e › [A c, c P (. [œ œ (A c * t 0, & % • 0 c P ; 0T.c< t c % L, 9 0 (Y
% L 0 9 0 % › 0 c * P c [e. [t m % œ " Y
% *\$\$ & v<* (@ 7 % d %
D œ c 0 W x f W \ V W ... S {(tc* A c P œ ,

d . : . / % % [_? q+) [68u
%* * 0 c P œ 2: H 6z • ' } e . / * A c P œ
GD t M
d " (("44 EPtEP6Ex c
{ (. / f60 H " ' k= E 3 ' 0 . E E
tE 0 c _ E . / E 0 P œ E . / D P W 4 c M M M M M M M M M M M M M M
8" " @ * \$ % & \$ % & 7

$$\dots > \setminus 1 P d \setminus r(z) - \dots + q S + I = I W \setminus 1 W ' (I \dagger W j \dagger P W$$

$$- H (Z \sim Zc) + a^3 [H (Z \sim Zc), H (Z \sim Zd)] + \{a^4 + b^4 Z + C^4 z^2\}$$

$$[H (Z \sim Zd) - H (Z \sim Ze)] \dots '08($$

$$> \setminus 1 P d (z), \dots \setminus 1 W 1 ' P | R > \dots \setminus 1 W 1 5 P k R$$

$$R > \dots \setminus 1 W 1] + \dots \setminus 1 W 1$$

» ØÐ áúÔÔ ØÍ á ÍÔÍ ÌÈÌÈÐÈ ÈÚÌ ÍÚ ÐÔÍÚá ÈÐÌ

$$\langle P_i(z) = V_i(z) - \dots - c^2 X^2 Y_j (z_k + z_k^* \dots) \dots$$

$$W \dots \sum_{k=i}^n \dots P ; | \dots \dots b > R 8$$

$$+ \dots \sum_{k=1}^7 (z) Z_{k+1} (z_k + z_k^* \dots) \dots [1/]$$

$$\dots \sum_{d=8}^1 \dots \dots / - 3(z) W u | P e$$

$$\dots \sum_{d=k}^n \dots \dots \dots$$

ÈÌÍ

$$\dots \sum_{m=0}^n P Z_d \setminus \dots \sum_{R=0}^n Z (Z + Z_{d+1}) (z, - z, M z, - z_r) (z, \dots)$$

$$\dots \sum_{i=0}^n t; \dots \sum_{i=0}^n Z (z < + z > + i) \dots$$

$$(1 > t \dots R (P \dagger q) \dots \dots = UH (\dots A Z_m)$$

$$\dots \sum_{i=1}^n Z (z > + z_i + i) \dots \dots$$

$$- S_{i=1}^n (z_i + z_i + i) \dots \dots$$

$$\dots \sum_{i=1}^n \dots \dots \dots$$

DCIn c O M (C k (4/ \ (.-, TM (. < x M , TM (. < . - ,
TM (. C f . TM (. C t . * PM
(4 \ (.8P8,

w8 (x, 0 Š 8~8 (x, P Š c~c (x, P Š u~u (x, P Š E*
y--# Q = 4?H 4c-6c@ \$ 4 \$-.

(x m f x * P8 , TM (x m x MPD
(; A ; / M (4 \$ (4
(. ; P4 < ' .8P9 < . MP4
TM (. < . ; P4 D
- 1 iR-(1NTc

s# V 43 \$N. K V\$, V&y :)4 4 @ B :)4 ;A

C V 4. FIR c N f BV4 s H V, z€ , H ? 0 œ GV 0 •
pJ.K Ž , (.) ,

; OEQ G O W ç; FLQ ; DEQ³

. V BB . V ç F / J n • C k U IRu M } I ... D £ R Jc
pOg (4 : 4 &

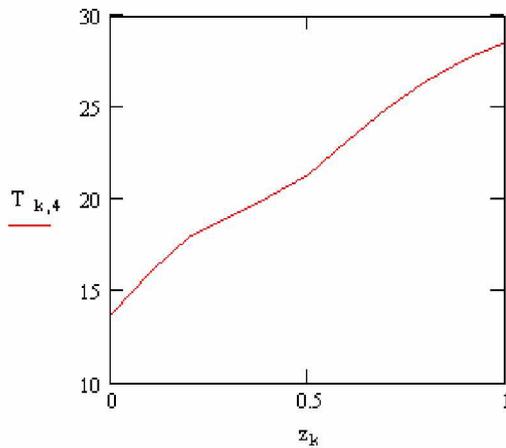
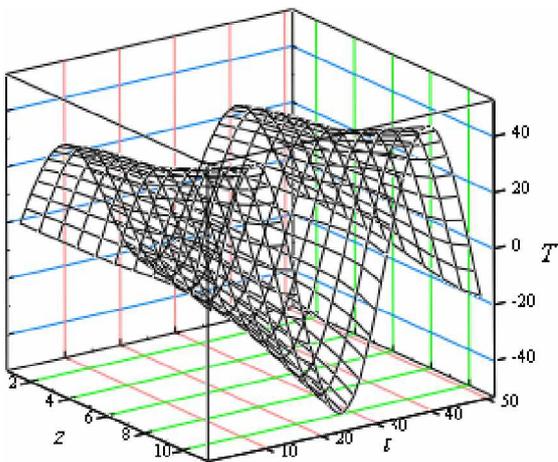
if . MP8 š q (. m f . MP8
' . m , ' c * P M / IRu - 1 iRkP - 1 (P
E4

IR • N M R • n M R eN

, V V (V 9' (4 \$
T
=>0 D (M 8 ; . o J C j & 0 : • (4 ' P (4 \$

789:;<= <> ?77?@A8? BCDCE F

S †
< u du < u
O_{du} ū^{-D} I M z M cNI M{u}Zj
h < I cN I C_α
O O u I c N
I M cC



g 4 y n

! ((% % & % (\$\$ %
(% *\$\$ & , % % % % 7" %

<;9Z?;[Z?
' > % >'!' %
#' = % !'d' q %
g IO2' #Oi ' %
)' /7 (h'd' > g'h' g k'b' 8 % 7@
-- g g % \$ & LS (% % #33 ' 0 . ' ' 0
" % 1 & %
' /7 (h'd' = " k' h' %
P55 g % \$ & L " %
#)0#. #33O ' S % 0 " ' S' E 0 E)'
2' = >'k' ! 7 " (\$ %& ' g' Ld % 9 IE #OE '
i' + & h'h' = (' +hd SSS
α2 l.

