ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ В СЛУЧАЕ БЕГУЩИХ НАГРУЗОК. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

АЛЕКСЕЕВА Л.А.
Институт математики ИМИМ МОН РК, г. Алматы
izvestiya@ktu.aknet.kg

Явления с движущимися нагрузками широко распространены на практике. К ним относятся разнообразные процессы, связанные с передвижением транспорта в различных средах, либо перемещением транспортируемых грузов в тоннелях и трубопроводах различного назначения. К данному классу задач можно отнести задачи дифракции сейсмических волн на протяженных подземных сооружениях. При математическом моделировании таких процессов приходится строить решения уравнений в классе "бегущих" функций, параметрических и автомодельных по ряду переменных. Параметр задачи – скорость движения источника возмущений в среде - существенно влияет на тип уравнений движения, который зависит от скоростей распространения волн в средах, так называемых *звуковых* скоростей. Их может быть несколько в зависимости от вида волн. Тип дифференциальных уравнений, описывающих движение среды, меняется в зависимости от отношения скорости источника возмущений к звуковым скоростям (чисел Маха). При этом приходится строить решения системы уравнений эллиптического, гиперболического и смешанного типов.

Здесь рассмотрены обобщенные решения уравнения Ламе, описывающие движение упругой среды, при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях движения источника возмущений, в том числе описывающие ударные волны, которые возникают в среде при сверхзвуковых источниках возмущений. Предложен метод определения условий на скачки решений и их производных на фронтах ударных волн.

1. Уравнения движения упругой среды. Ударные волны. Обозначим $(x_1,\dots x_N)$ лагранжевы декартовы координаты точек упругой среды, заданной параметрами Ламе λ, μ, плотностью ρ, u_i - компоненты вектора перемещений u; σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, связанные с перемещениями законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\, divu + \mu\left(\partial_j u_i + \partial_j u_i\right), \quad i,j=\overline{1,N} \quad (1)$$

Здесь и далее $\partial_j u_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $\delta_i^j = \delta_{ij}$ - символ Кронекера. Уравнения движения сплошной среды, с учетом закона Гука (1), называются *уравнениями Ламе.* Они имеют вид:

$$L_i^j(\partial_x,\partial_t)u_j = (c_1^2-c_2^2)\partial_i\partial_j u_j + c_2^2\Delta_N u_i - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = -G_i(x,t), \quad (2)$$

где $c_1 = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ - скорости распространения объемных (сжатия-расширения) и сдвиговых волн в упругой среде, Δ_N - N-мерный оператор Лапласа, G_i - декартовы координаты массовой силы. Всюду по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до N (тензорная свертка). При *N=2* деформация плоская $(u_j = u_i(x_1,x_2,t), \quad j=1,2; \quad u_3=0)$, при *N=3* - пространственная.

Система (2) достаточно подробно исследована в работах Петрашеня [1]. В силу положительной определенности упругого потенциала среды, она является строго гиперболической. Детерминант ее характеристической матрицы $L = \left\{\left(c_1^2 - c_2^2\right)\xi_i\xi_j + \left(c_2^2\|\xi\|^2 - \omega^2\right)\delta_i^j\right\}$ имеет *2N* (с учетом кратности) действительных корней: 6 при *N=3* $\left(\omega/\|\xi\| = \pm c_1, \pm c_2, \pm c_2\right)$ и 4 при *N=2:* $\left(\omega/\|\xi\| = \pm c_1, \pm c_2\right)$.

Гиперболические системы могут иметь разрывные по производным решения. Поверхность разрыва F в $R^{N+1} = R^N \times t$, $(-\infty < t < \infty)$, совпадает с характеристической поверхностью системы. Ей соответствует волновой фронт F_t, который движется в пространстве R^N с течением времени. Единичный вектор нормали к F в R^{N+1} $\nu=\{\nu_1,\ldots,\nu_N,\nu_t\}$ должен удовлетворять характеристическому уравнению:

$$\det\left\{\left(c_1^2-c_2^2\right)\nu_i\nu_j+\delta_{ij}\left(c_2^2\left\|\nu\right\|_N^2-\nu_t^2\right)\right\}=0,\quad \left\|\nu\right\|_N=\sqrt{\sum_{k=1}^N \nu_k^2} \qquad 3)$$

В силу гиперболичности системы (2), это уравнение имеет корни: $\nu_t=\pm c_j\left\|\nu\right\|_N$, $j=1,2.$

Поверхность F_t движется в R^N со скоростью $V=-\nu_t/\left\|\nu\right\|_N$. Отсюда следует, что F_t движется с одной из звуковых скоростей: $V=c_1$ или $V=c_2$.

Требование непрерывности перемещений при переходе через волновой фронт, связанное с сохранением сплошности среды, приводит к известным кинематическим условиям совместности решений на подвижных фронтах [1]:

$$\left[u\right]_{F_t}=0,\ \left[m_j\partial_t u_i+V\partial_j u_i\right]_{F_t}=0,\qquad i,j=\overline{1,N} \qquad (4)$$

(второе условие непрерывности касательных производных u_i на F_t - следствие первого). Помимо этого из (4) следуют динамические условия совместности решений на фронтах, эквивалентные закону сохранения импульса в его окрестности [1]:

$$\left[\sigma_{ij}m_j+\rho V\partial_t u_i\right]_{F_t}=0\qquad i=\overline{1,N}. \quad (5)$$

Такие волны называются *ударными,* т.к. на их фронте происходит скачок напряжений, который приводит к скачку скоростей.

2. Бегущие решения уравнений Ламе. Числа Маха. Пусть массовая сила, действующая в среде, движется с постоянной скоростью *c* вдоль координатной оси X_N (здесь, для удобства выкладок, противоположно ее направлению) и в подвижной системе координат не зависит от *t*: $G_k=G_k(x_1,\ldots,x_N+ct)$. Будем искать решения (2) такой же структуры: $u_k=u_k(x_1,\ldots,x_N+ct)$, которые назовем *бегущими.* Назовем скорость *c дозвуковой,* если $c<c_2$; *межзвуковой,* если $c_2<c<c_1$ и *сверхзвуковой,* если $c>c_1$. Скорость называется *первой* или *второй звуковой,* если $c=c_j$, $j=1,2$ соответственно.

Введем подвижную систему координат $x'=(x'_1,\ldots,x'_N)=$ $(x_1,\ldots,x_N+ct)$. В новых переменных уравнения движения имеют вид:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x'_j}-\rho c^2\frac{\partial^2 u_i}{\partial {x'_N}^2}+\rho G_i=0,\qquad i,j=\overline{1,N}, \quad (6)$$

или, с учетом закона Гука, -

$$\left(\left(M_1^{-2}-M_2^{-2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x'_i\partial x_j}+\left(M_2^{-2}\Delta-\frac{\partial^2}{\partial {x'_N}^2}\right)\delta_j^i\right)u_i+c^{-1}G_j=0. \quad (7)$$

Здесь $M_j=c/c_j$ числа Маха. При $M_j<1$ $(j=1,2)$ нагрузка дозвуковая, система уравнений (8) эллиптического типа. При сверхзвуковых скоростях $M_j>1$ $(j=1,2)$ и уравнения становятся гиперболическими. Если $M_1<1$, $M_2>1$ - межзвуковая (трансзвуковая), тип уравнений гиперболо-эллиптический. При звуковых скоростях уравнения параболо-эллиптические, если $M_2=1$, а при $M_1=1$ становятся параболо-гиперболическими.

В силу гиперболичности исходной системы, уравнения (7) также могут иметь разрывные решения. Пусть *F* поверхность разрыва в пространстве переменных *x',* где она неподвижна, и движущаяся с одной из звуковых скоростей $V=c_1,c_2$ в пространстве переменных $(x_1,\ldots,x_N)$. Легко показать, что $V=ch_N$, где *h*= $(h_1,\ldots,h_N)$ - единичная нормаль к *F* в R^N. Значит, поскольку $c=c_j/h_N$ и $\left|h_N\right|\le 1$ такие поверхности могут возникнуть лишь при сверхзвуковых скоростях: $c\ge c_j$.

Кинематические и динамические условия совместности решений на разрывах в пространстве переменных x', примут вид:

$$\lfloor u_j \rfloor_F = 0, \quad \lfloor h_z u_{i,j} - h_j u_{i,N} \rfloor_F = 0, \qquad (8)$$

$$\lfloor \sigma_{ij} h_j - \rho c^2 h_N u_{i,N} \rfloor_F = 0 \quad (9)$$

О п р е д е л е н и е. Будем называть решение уравнений (7) *классическим*, если оно непрерывно, дважды дифференцируемо всюду, за исключением волновых фронтов (при $c > c_2$), число которых конечно на любом замкнутом множестве в R^N, и на которых удовлетворяются условия на скачки (8),(9).

Рассмотрим уравнения (8) и его решения на пространстве обобщенных функций.

3. Обобщенные решения. Условия на фронтах ударных волн. Пусть $u(x')$ - классическое решение (7). Обозначим $\hat{u}(x,z)$ соответствующую ему регулярную обобщенную функцию: $\hat{u}(x,z) = u(x')$, $x = (x'_1,...,x'_{N-1}), z = x'_N$. Пользуясь правилами дифференцирования обобщенных функций [2], получим:

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}}{\partial x'_j} - \rho c^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_N{}^2} + \rho G_i = \left[\sigma_{ij} h_j - \rho V^2 h_N \frac{\partial u_i}{\partial x_N} \right]_F \delta_F +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left[\lambda u_k h_k \delta_{ij} + \mu (u_i h_j + u_j h_i) \right]_F \delta_F \right\} - \frac{\partial}{\partial x_N} \left\{ \left[u_i h_N \right]_F \delta_F \right\}, \quad (10)$$

где $a\delta_F$ -сингулярная обобщенная функция - простой слой на F, плотность которого определяется скачком перемещений на фронте волны. В силу условий на фронтах ударных волн (8) и (9), правая часть (10) обращается в 0, т.е. обобщенная функция $\hat{u}$ удовлетворяет тем же уравнениям (7), но уже в обобщенном смысле.

Отсюда, между прочим, следует простой формальный способ получения условий на скачки решений и их производных на фронтах. Ударные волны являются обобщенными решениями уравнений Ламе, поэтому достаточно приравнять плотности независимых слоев нулю, чтобы получить условия на скачки на фронтах ударных волн.

4. Фундаментальные решения уравнения Ламе. Тензор Грина. При решении краевых задач важную роль играют фундаментальные решения, которые описывают динамику среды при действии сосредоточенных источников различного типа. Здесь приведем два фундаментальных решения, которые играют очень важную роль при построении сингулярных граничных интегральных уравнений, разрешающих первую и вторую краевые задачи теории упругости в случае бегущих нагрузок [3].

Рассмотрим $\hat{U}_k^i$ - матрицу фундаментальных решений уравнения движения (7):

$$L_i^j \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \right\} \hat{U}_j^k + \delta(x')\delta_i^k = 0, \qquad i, j = \overline{1, N} \ (11)$$

удовлетворяющую условиям затухания на бесконечности.

$$\hat{U}_i^k \to 0, \quad \hat{U}_{i,j}^k \to 0, \quad i,j,k = 1,N \quad \text{при } x' \to \infty \ (12)$$

Можно показать, что она является тензором. Он описывает динамику упругой среды при действии сосредоточенной силы с компонентами $G_i = c\delta(x)\delta(z)\delta_i^{[k]}$, действующей в направлении координатной оси X_k, и бегущей со скоростью *c* вдоль оси X_N. Здесь и далее $x = (x'_1, \ldots, x'_{N-1})$, $z = x'_N$.

Используя ппреобразования Фурье обобщенных функций для (80), найдем

$$c^2 \bar{U}_i^j = \frac{M_2^2 \delta_{ij}}{(\|\xi\|^2 - M_2^2 \xi_N^2)} - \frac{\xi_i \xi_j}{\xi_N^2} \left[\frac{1}{\|\xi\|^2 - M_2^2 \xi_N^2} - \frac{1}{\|\xi\|^2 - M_1^2 \xi_N^2} \right] \qquad (13)$$

где $\bar{U}_k^j(\xi_1,...,\xi_N) = F_{x'_1 \ldots x'_N}\left[\hat{U}_k^j\right]$ - преобразование Фурье. Откуда следует

$$c^2 U_i^j(x,z) = M_2^2 \delta_i^j f_{02}(\|x\|, z) + \left(f_{21,ij}(\|x\|, z) - f_{22,ij}(\|x\|, z) \right), \ (14)$$

где f_{km} - оригиналы функций $\overline{f}_{km} = \xi_N^{-k}\left(\|\xi\|^2 - M_m^2\xi_N^2\right)^{-1}$, вид которых существенно зависит от чисел Маха. Легко видеть, что это преобразование Фурье фундаментального решения уравнения

$$\Delta_{N-1}\hat{f}_{0m} + (1-M_m^2)\hat{f}_{0m} + \delta(x)\delta(z) = 0 \quad (15)$$

При дозвуковых скоростях это уравнение эквивалентно эллиптическому уравнению Лапласа-Пуассона, при сверхзвуковых – волновому уравнению (уравнению Даламбера для N=2), при звуковой скорости переменная z в уравнении исчезает, уравнение становится параболическим, т.к. размерность пространства на единицу выше. Что и определяет тип уравнений (7), отмеченный выше.

Для $k = 1,2$ в дозвуковом случае: $f_{km} = \int\limits_0^{|z|} f_{(k-1)m}(x,z)dz, \quad для\ V < c_m$, в сверхзвуковом: $f_{km} = \theta(z)\int\limits_0^{z} f_{(k-1)m}(x,z)dz \quad для\ V > c_m$. Вид функции f_{km} зависит от размерности задачи.

Для *N*=*3* при дозвуковых скоростях $(c < c_{k)}$:

$$4\pi f_{ok}(\|x\|, z) = (m_k^2\|x\|^2 + z^2)^{-1/2},\ 4\pi f_{1k} = \mathrm{sgn}\ |z|\ ln\left((|z| + V_k^+)/m_k\|x\|\right),$$

$$4\pi f_{2k} = |z| ln\left((|z| + V_k^+)/m_k\|x\|\right) - V_k^+ + m_k\|x\|,$$

при звуковых скоростях $(c = c_{k)}$:

$$2\pi f_{ok}(\|x\|, z) = -\delta(z)\ln\|x\|,\quad 4\pi f_{1k} = -2\theta(z)\ ln\|x\|,\quad 2\pi f_{2k} = -z\theta(z)\ ln\|x\|,$$

при сверхзвуковых скоростях $(c > c_{k)}$:

$$2\pi f_{ok}(\|x\|, z) = \theta(z - m_k\|x\|)(z^2 - m_k^2\|x\|^2)^{1/2},\ 2\pi f_{1k} = \theta(z - m_k\|x\|)\ln\left(\left(z + V_k^-\right)/m_k\|x\|\right),$$

$$2\pi f_{2k} = \theta(z - m_k\|x\|)\left(z\ \ln\left(\left(z + V_k^-\right)/m_k\|x\|\right) - V_k^-\right),$$

Здесь $\theta(z)$ - функция Хевисайда.

При выборе фундаментальных решений уравнения, помимо условий затухания решений на бесконечности, учитывались условия излучения при сверхзвуковых скоростях.

5.Фундаментальная матрица напряжений $\hat{\mathrm{T}}_i^j$.Используя закон Гука (1), введем тензоры напряжений, порождаемые тензором Грина:

$$\hat{S}_{ij}^k(x,z) = \lambda\hat{U}_{m,m}^k\delta_{ij} + \mu\left(\hat{U}_{i,j}^k + \hat{U}_{j,i}^k\right),$$

$$\hat{\Gamma}_i^k(x,z,n) = \hat{S}_{ij}^k(x,z)n_j,\quad \hat{\mathrm{T}}_i^j(x,z,n) = -\hat{\Gamma}_j^i(x,z,n).$$

Верна следующая

Т е о р е м а. *Тензор* $\hat{\mathrm{T}}_i^j$ *является обобщенным решением уравнения Ламе с правой частью вида:* $L_i^j\left(\partial_{x'}\right)\hat{T}_j^k + K_k^i\left(\partial_{x'}, n\right)\delta(x') = 0$

Введенный тензор удовлетворяет уравнениям движения и описывает динамику упругой среды при действии бегущей сосредоточенной массовой силы мультипольного типа. Он играет фундаментальную роль при решении краевых задач.

6.Обобщенные решения уравнений Ламе. Представленные фундаментальные матрицы можно использовать для изучения динамики сред с бегущими нагрузками, распределенными по объему, поверхности или прямой.

Если $G_k(x,z)$ - локально интегрируемая фунция с конечным носителем, что типично для физических задач, в силу регулярности *U*, решение (7) имеет вид:

$$u_i(x,z) = c^{-1} \int\limits_{\mathrm{supp}G} U_i^k(x-y, z-\tau) G_k(y,\tau) dy d\tau, \; i = \overline{1,N}$$

Условия на $G_k(x,z)$ можно ослабить, если учесть асимптотику U на бесконечности. Если бегущая сила сосредоточена на цилиндрической поверхности S, образующая которой параллельна оси Z, то ее можно описать сингурной функцией с компонентами $\hat{G}_k = g_k(x,z)\delta_S(x,z)$. Если g - интегрируемая вектор-функция на S (для сверхзвуковых скоростей с полуограниченным слева носителем по z), тогда решение (15) имеет вид:

$$u_i = c^{-1} \int\limits_S U_i^k(x-y, z-\tau) g_k(y,\tau) dS(y,\tau), i = \overline{1,N}$$

Если бегущая сила сосредоточена на оси Z, ее можно описать сингурной функцией $\hat{G}_k = g_k(z)\delta(x)$. Если g интегрируемая вектор-функция (для сверхзвуковых скоростей с полуограниченным слева носителем по z), тогда решение имеет вид:

$$u_i = c^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U_i^k(x, z-\tau) g_k(z) d\tau, \; i = \overline{1,N}$$

При этом эти решения, в силу леммы Дюбуа-Реймона [2], будут классическими.

Для более сложного вида нагрузок, описываемых сингулярными обобщенными функциями, обобщенное решение имеет вид свертки $\hat{u}_i = c^{-1} U_i^k * \hat{G}_k$, которую следует брать, согласно ее определению [2].

Проведены расчеты динамики упругой среды при действии бегущих нагрузок различного типа, сосредоточенных на оси и цилиндрической поверхности с краем, в до-, транс- и сверхзвуковом диапазоне скоростей.

Литература

1. Петрашень Г.И. Основы математической теории распространения упругих волн. - В кн. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л., 1978. Вып.XVIII, 248с.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. 1978. 528с.
3. Alekseyeva. L.A. Boundary Element Method of Boundary Value Problems of Elastodynamics by Stationary Running Loads //Int. J. Engineering Analysis with Boundary Element.1998. No 11. P.37-44 .